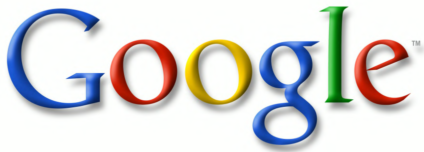


L. A. Sohnckes

Sammlung von Aufgaben

aus der

Differential- u. Integralrechnung.

Zweiter Teil. Zweite Abteilung:

Integralrechnung II.

Sechste verbesserte Auflage.

Bearbeitet und herausgegeben

von

Dr. Martin Lindow,

wissensch. Lehrer an den Königl. Vereinigten Maschinenbauschulen in Dortmund.

Mit 151 in den Text gedruckten Figuren.



Jena,

H. W. Schmidt's Verlagsbuchhandlung

Gustav Tauscher.

1906.

L. A. Sohnckes

Sammlung von Aufgaben

aus der

Integralrechnung.

Zweite Abteilung.

Sechste verbesserte Auflage.

Bearbeitet und herausgegeben

von

Dr. Martin Lindow,
wissensch. Lehrer an den Königl. Vereinigten Maschinenbauschulen in Dortmund.

Mit 151 in den Text gedruckten Figuren.

Jena,
H. W. Schmidt's Verlagsbuchhandlung
Gustav Tauscher.
1906.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-18-1923

Inhalt.

Kapitel I.

Mehrfache Integrale.

Kapitel II.

Differentialgleichungen erster Ordnung.

Kapitel III.

Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Kapitel IV.

Variationsrechnung.

Kapitel I.

Mehrfache Integrale.

§ 1. Definition und Anwendungen der mehrfachen Integrale.

1. Definitionen und Lehrsätze.

Enthält eine Funktion f die beiden Variabeln x und y, so kann man zunächst nach y integrieren, indem man x als konstant betrachtet, und dann diesen Ausdruck nach x, indem man y als konstant betrachtet. Das so entstandene Integral

$$\int dx \int f(x, y)\, dy \quad \text{oder} \quad \iint f(x, y)\, dx\, dy$$

heißt ein zweifaches. Ganz entsprechend wird das dreifache Integral

$$\int dx \int dy \int f(x, y, z)\, dz \quad \text{oder} \quad \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

ausgerechnet. Es läßt sich zeigen, daß unter bestimmten Bedingungen die Reihenfolge der Integration gleichgültig ist.

Sind die Integrale bestimmte, so sind zwei Fälle möglich. Entweder treten in den Grenzen nur konstante Zahlen auf, z. B.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy.$$

Dann ist zunächst x als konstant aufzufassen und das Integral $\int_{y=c}^{y=d} f(x, y)\, dy$ auszurechnen. Dies ist nur noch eine Funk-

tion von x, $F(x)$ und das Doppelintegral ist auf das einfache Integral

$$\int_a^b F(x)\,dx$$

zurückgeführt.

Häufig sind aber auch die Grenzen alle oder zum Teil variabel, z. B. in dem Integral

$$\int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Hier bilde man zuerst $\int_{z=\varphi_1(x,y)}^{z=\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$. Dies ergibt eine nur von x und y abhängende Funktion $F(x, y)$. Dann ist $\int_{y=\psi_1(x)}^{y=\psi_2(x)} F(x, y)\,dy$ zu bilden, ein Ausdruck der nur von x abhängt, $= \Phi(x)$. Endlich ist

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx$$

auszuführen.

Bei konstanten Grenzen läßt sich die Reihenfolge der Integration im allgemeinen ohne weiteres umkehren, bei variabeln Grenzen ändern sich diese. Die neuen Grenzen werden am besten durch geometrische Überlegungen festgestellt.

Sollen in dem Integral

$$J = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dx\,dy$$

die Variabeln x und y durch t und u ersetzt werden, wobei $x = \omega_1(t, u)$, $y = \omega_2(t, u)$ ist, so setze man diese Werte in die Funktion $f(x, y)$ ein, die dadurch in $F(t, u)$ übergehe. Die neuen Grenzen sind durch besondere (womöglich geometrische) Betrachtungen zu ermitteln.

Es ist dann

$$J = \iint F(t, u) \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} & \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial u} & \frac{\partial \omega_2}{\partial u} \end{vmatrix} dt\,du.$$

Ist $J = \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, und

$x = \omega_1(t, u, v)$; $y = \omega_2(t, u, v)$; $z = \omega_3(t, u, v)$, so ist

$$J = \iiint F(t, u, v) \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} & \frac{\partial \omega_2}{\partial t} & \frac{\partial \omega_3}{\partial t} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial u} & \frac{\partial \omega_2}{\partial u} & \frac{\partial \omega_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial v} & \frac{\partial \omega_2}{\partial v} & \frac{\partial \omega_3}{\partial v} \end{vmatrix} dt\, du\, dv \quad .$$

Bezüglich des Unendlichwerdens des Integranden oder der Grenzen muß auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

2. Anwendungen auf Geometrie und Mechanik.

Ist eine Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ gegeben, so bringe man ihre Gleichung auf die Form $z = f(x, y)$. Setzt man $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = q$, so ist die Oberfläche

$$F = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Die Schwerpunktskoordinaten der Fläche sind

$$\xi = \frac{\iint x \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy}{F},$$

$$\eta = \frac{\iint y \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy}{F},$$

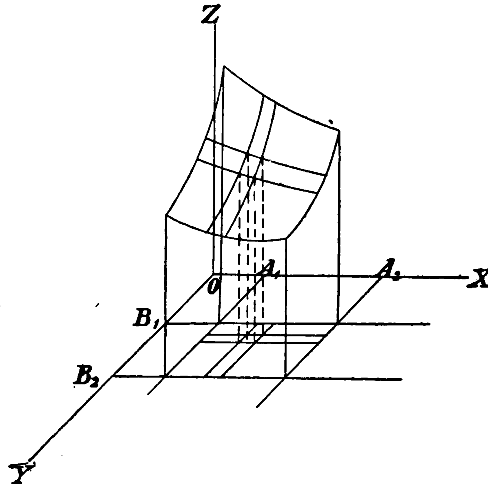
$$\zeta = \frac{\iint z \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy}{F} = \frac{\iint f(x, y) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy}{F}.$$

Die Grenzen der Integrale richten sich nach der Begrenzung des Flächenstückes.

1) Ist die Projektion des Flächenstückes auf die xy Ebene das von den Linien $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$ begrenzte Rechteck, so ist die Fläche

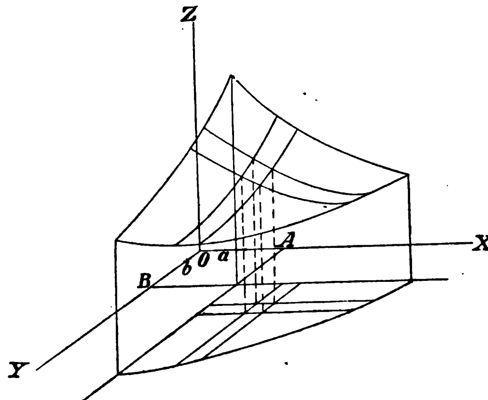
1*

$$F = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$



2) Ist die Projektion des Flächenstückes auf die XY-Achse begrenzt durch die Kurve $\varphi(x, y) = 0$, eine Parallele zur X-Achse ($y = b$), und eine zur Y-Achse ($x = a$), so ist

$$F = \int_{a}^{x_0} \int_{b}^{\psi(x)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$



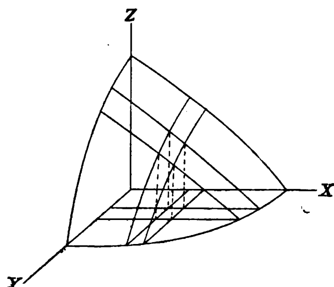
Hierbei ist $\psi(x)$ der Wert, der sich aus der Gleichung $\varphi(x, y)$ für y ergibt und x_0 ist zu berechnen aus $\varphi(x_0, b) = 0$.

Führt man aber zuerst die Integration nach x aus, so ist

$$F = \int_b^{y_0} \int_a^{\chi(y)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

wobei sich $\chi(y)$ als Wert von x aus $\varphi(x, y) = 0$ und y_0 aus $\varphi(a, y_0) = 0$ ergibt.

3) Wird der Inhalt der Fläche $\varphi(x, y, z)$ oder $z = f(x, y)$ gesucht, die durch die Schnittlinien mit den drei Koordinatenebenen begrenzt ist, so findet man die Projektion auf die



XY-Ebene, indem man $z = 0$ setzt, ihre Gleichung ist also $f(x, y) = 0$. Setzt man ferner $a = 0$ und $b = 0$, so ist dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt.

Ist es bequemer, die Fläche in der Form $y = f_1(x, z)$ oder $x = f_2(y, z)$ darzustellen, so ist natürlich die Behandlung ganz analog.

Fällt man von jedem Punkte der Begrenzungslinie der Fläche $z = f(x, y)$ das Lot auf die XY-Ebene, so entsteht dadurch ein Körper, der begrenzt wird:

1) von der Fläche, 2) von ihrer Projektion, 3) von einer geradlinigen abwickelbaren Mantelfläche.

Der Inhalt dieses Körpers ist

$$J = \iint z\, dx\, dy.$$

Die Begrenzung ist wie vorher zu wählen. Vgl. die vorhergehenden Figuren.

Ebenso kann man die Lote auf die andern Koordinatenebenen fällen und erhält

$$J = \iint y\, dx\, dz,$$

$$J = \int\int x \, dy \, dz.$$

Die Begrenzung ist entsprechend zu wählen.

Beachtet man, daß z. B. $z = \int dz$ ist, so findet man

$$J = \int\int\int dx \, dy \, dz.$$

Die Schwerpunktskoordinaten eines homogenen Körpers sind

$$\xi = \frac{\int\int\int x \, dx \, dy \, dz}{J},$$

$$\eta = \frac{\int\int\int y \, dx \, dy \, dz}{J},$$

$$\zeta = \frac{\int\int\int z \, dx \, dy \, dz}{J}.$$

Die Grenzen der im Zähler auftretenden Integrale sind ebenso zu wählen wie die in J auftretenden.

Unter der Dichtigkeit ϱ versteht man bei gleichförmiger Massenverteilung die Masse, welche in der Volumeneinheit des Körpers, resp. der Flächeneinheit einer Fläche oder der Längeneinheit einer Linie enthalten ist, sie ist also bei einem Körper $= \frac{\mu}{J}$. In einem inhomogenen Körper bezeichnet man als Dichtigkeit den Grenzwert dieses Bruches, es ist $\varrho = \frac{d\mu}{dJ}$. ϱ ist hierbei eine Funktion der Koordinaten. Dann ist die Masse des Körpers bestimmt durch

$$\mu = \int\int\int \varrho \, dx \, dy \, dz,$$

und der Schwerpunkt durch

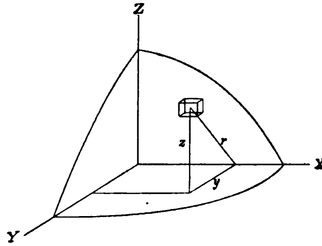
$$\xi = \frac{\int\int\int x \varrho \, dx \, dy \, dz}{\mu} \text{ etc.}$$

Die Grenzen sind wie vorher zu bestimmen.

Das Trägheitsmoment eines Elementarvolumens in bezug auf eine Achse ist gleich seiner Masse multipliziert mit dem

Quadrate des Abstandes von der Achse. Ist die Dichtigkeit $=1$, so ist das Trägheitsmoment eines Elementarvolumens in bezug auf die X-Achse

$$dT = (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$



Das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf die X-Achse ist

$$T_x = \iiint (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Entsprechend ist T_y und T_z zu bilden.

Der Trägheitsradius eines Körpers in bezug auf eine Achse ist die Entfernung von derselben, die ein materieller Punkt, mit der Masse des Körpers beladen, haben müßte, damit sein Trägheitsmoment gleich dem des Körpers sei. Nennt man ihn r, so gilt die Beziehung

$$Mr^2 = T.$$

§ 2. Oberflächenberechnungen.

1) Aufg. Man berechne den Inhalt desjenigen Teiles der Oberfläche

$$z = \tfrac{2}{3} \frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}},$$

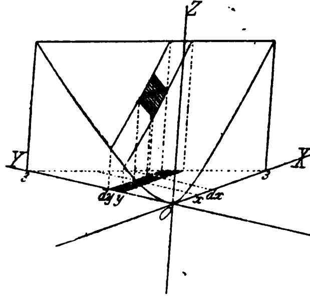
welcher zwischen den Ebenen $x=0$, $y=0$, $x+y=3$ liegt.

Lös.: In dieser Aufgabe ist

$$p = \sqrt{\frac{x+y}{2}},\quad q = \sqrt{\frac{x+y}{2}},\quad \text{also } \sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+x+y}.$$

Man kann zunächst den Inhalt des Teiles der Fläche berechnen, dessen Projektion auf die XY-Ebene ein unendlich dünner Streifen parallel der X-Achse ist. Dieser wird begrenzt durch

die Kurven $x=0$ und $x+y=3$ oder $x=3-y$. x wächst also in diesem Streifen von 0 bis $3-y$. Daher ist der Inhalt des betreffenden Flächenteiles



$$d\Omega = dy\int_0^{3-y}\sqrt{1+x+y}\,dx,$$

$$d\Omega = dy\left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+x+y)^3}\right]_{x=0}^{x=3-y},$$

$$d\Omega = \frac{2}{3}dy\left(8-\sqrt{(1+y)^3}\right).$$

Den Inhalt der ganzen Fläche findet man, indem man sämtliche Streifen summiert. y wächst dabei von 0 bis zu dem Werte, der sich aus der Gleichung $0+y=3$ ergibt. Somit ist

$$\Omega = \frac{2}{3}\int_0^3\left(8-\sqrt{(1+y)^3}\right)dy,$$

$$\Omega = \frac{116}{15}.$$

2) Aufgaben über die Komplanation der Kugeloberfläche

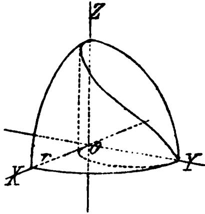
$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

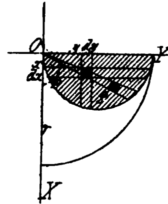
Die Kugeloberfläche werde durchdrungen a) von dem durch die Gleichung $x^2-ry+y^2=0$ dargestellten geraden Zylinder; b) von dem Zylinderausschnitt, dessen krumme Oberfläche durch die Gleichung $y^2=3x^2-\frac{4x^4}{r^2}$ gegeben ist und der andererseits von den Ebenen $y=0$ und $y=x$ begrenzt wird. Man berechne in beiden genannten Fällen den quadratischen Inhalt desjenigen von dem betreffenden Zylinder aus der Kugel geschnittenen Flächenstückes, welches im ersten Oktanten liegt.

Lös.: a) Es ist $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, also

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$





Die Projektion der Begrenzung der Fläche wird durch die Kurven $x = 0$ und $x^2 - ry + y^2 = 0$ oder $x = \sqrt{y(r - y)}$ gebildet. Dies sind also die Grenzen bei der Integration nach x. y wächst von 0 bis zu dem Werte, der aus der Gleichung $0^2 - ry + y^2 = 0$ gewonnen wird, also r.

Also wird

$$\Omega = r \int_0^r dy \int_0^{\sqrt{y(r-y)}} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = r \int_0^r \arcsin \sqrt{\frac{y}{r + y}}\, dy =$$

$$= r \left[y \arcsin \sqrt{\frac{y}{r + y}} - \sqrt{r} \left(\sqrt{y} - \sqrt{r} \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{y}{r}} \right) \right]_0^r =$$

$$= r \left[r \cdot \tfrac{1}{4}\pi - \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \sqrt{r} \cdot \tfrac{1}{4}\pi \right) \right] = r^2 \left(\tfrac{1}{2}\pi - 1 \right).$$

Wenn Polarkoordinaten $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$ angewendet werden, so ist an die Stelle von $dx\, dy$ zu setzen: $\varrho\, d\varrho\, d\varphi$, und die Gleichung $x^2 + y^2 - ry = 0$ geht über in $\varrho = r \sin \varphi$. ϱ wächst also von 0 bis $r \sin \varphi$, φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$.

Mithin ist

$$\Omega = r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{r \sin \varphi} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}} = r^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \cos \varphi)\, d\varphi =$$

$$= r^2 \left[\varphi - \sin \varphi \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = r^2 \left(\tfrac{1}{2}\pi - 1 \right).$$

Bei Vertauschung der Integrationsfolge ergibt sich ebenso:

$$\Omega = r\int_0^r \frac{\varrho\, dr}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\int_{\arcsin\frac{\varrho}{r}}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi = r\int_0^r \left[\tfrac{1}{2}\pi - \arcsin\frac{\varrho}{r}\right]\frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{r^2-\varrho^2}} =$$

$$= r\left[-\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{r^2-\varrho^2} + \sqrt{r^2-\varrho^2}\arcsin\frac{\varrho}{r} - \varrho\right]_0^r = r^2\left(\tfrac{1}{2}\pi - 1\right).$$

Wird der soeben berechnete Flächeninhalt von dem Kugeloktanten abgezogen, so folgt für das übrig bleibende Flächenstück:

$$\Omega_1 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 - r^2\left(\tfrac{1}{2}\pi - 1\right) = r^2.$$

Anm. Zur Übung möge dieser letztere Flächeninhalt auch direkt bestimmt werden. Hierbei hat man zu ermitteln:

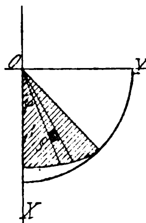
$$\Omega_1 = r\int_0^r dy \int_{\sqrt{y(r-y)}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},$$

oder in Polarkoordinaten:

$$\Omega_1 = r\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_{r\sin\varphi}^{r} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{r^2-\varrho^2}} = r\int_0^r \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\int_0^{\arcsin\frac{\varrho}{r}} d\varphi.$$

b) Führt man Polarkoordinaten $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ ein, wodurch die Gleichung $y^2 = 3x^2 - \frac{4x^4}{r^2}$ übergeht in

$\varrho^2 = r^2\,\frac{4\cos^2\varphi - 1}{4\cos^4\varphi}$, so folgt



$$\Omega = r\int_0^{\frac{1}{4}\pi} d\varphi \int_0^{r\sqrt{\frac{4\cos^2\varphi-1}{4\cos^4\varphi}}} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{r^2-\varrho^2}} =$$

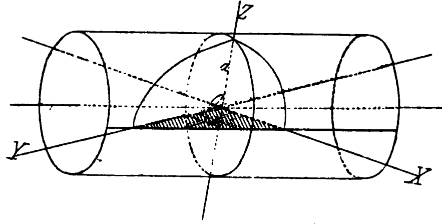
$$r^2 = \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\left[1 - \frac{2\cos^2\varphi - 1}{2\cos^2\varphi}\right] d\varphi = \tfrac{1}{2}r^2\left[\operatorname{tang}\varphi\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{2}r^2.$$

3) Aufg. Es soll für den Zylinder

$$z^2 + (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 - a^2 = 0$$

der Inhalt desjenigen Teiles der Mantelfläche berechnet werden, welcher im ersten Oktanten liegt.

Lös.: Die Achse dieses Zylinders ist, wie man leicht erkennt, die Gerade $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0$, $z = 0$; jeder zu dieser Geraden senkrechte Schnitt ist ein Kreis vom Radius a. Da der Zylinder die XY-Ebene in den Geraden $x \cos \alpha + y \sin \alpha = \pm a$ schneidet, so ergeben sich als Grenzen für die Integration nach y, wenn dieselbe zuerst ausgeführt wird: $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{a - x \cos \alpha}{\sin \alpha}$ und als Grenzen für die Integration nach x: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a}{\cos \alpha}$.



Nun ist

$$z = \sqrt{a^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2}, \text{ also}$$

$$p = -\frac{(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \cos \alpha}{z}, \quad q = -\frac{(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \sin \alpha}{z},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2}};$$

somit wird

$$\Omega = \int_0^{\frac{a}{\cos \alpha}} dx \int_0^{\frac{a - x \cos \alpha}{\sin \alpha}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2}}.$$

Die Integration nach y liefert:

$$\int_0^{\frac{a - x \cos \alpha}{\sin \alpha}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha} \left[\arcsin \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{a}\right]_0^{\frac{a - x \cos \alpha}{\sin \alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left[\tfrac{1}{2}\pi - \arcsin\frac{x\cos\alpha}{a}\right];$$

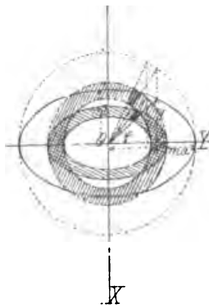
demnach ist

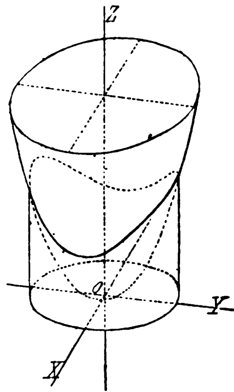
$$\Omega = \frac{a}{\sin\alpha}\int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}}\left[\tfrac{1}{2}\pi - \arcsin\frac{x\cos\alpha}{a}\right]dx =$$

$$= \frac{a}{\sin\alpha}\left[\tfrac{1}{2}\pi x - x\arcsin\frac{x\cos\alpha}{a} - \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{a^2 - x^2\cos^2\alpha}\right]_0^{\frac{a}{\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

4) Aufg. Wie groß ist der Inhalt des Flächenstückes, welches der Zylinder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$ aus dem Paraboloid $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ ausschneidet?





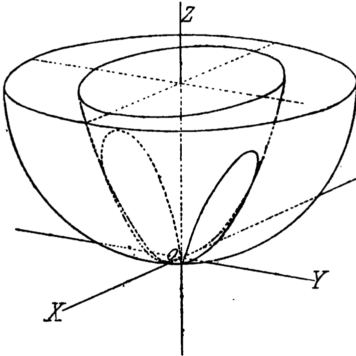
Lös.: In diesem Falle ist $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$.

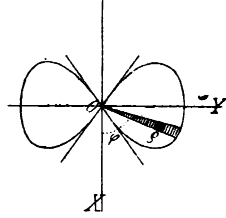
Betrachtet man die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$ als affine Figur eines Kreises und setzt demgemäß $x = ma\varrho\cos\varphi$, $y = mb\varrho\sin\varphi$, so folgt:

$$\Omega = abm^2\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + m^2\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi = 2\pi\,abm^2\int_0^1\sqrt{1 + m^2\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho =$$

$$= \tfrac{2}{3}ab\pi\left[(1 + m^2\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}ab\pi\left[(1 + m^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

5) Aufg. Das elliptische Paraboloid $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$, wo a und b positive Zahlen bedeuten, wird von der Kugelfläche $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2$ geschnitten. Man bestimme den Flächeninhalt des Kugelstückes, welches innerhalb der Durchdringungskurve liegt.





Lös.: Mit Hilfe der Kugelgleichung findet sich:

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}},$$

oder wenn man Polarkoordinaten ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) anwendet:

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - r^2}}.$$

Die Elimination der Variablen z aus den gegebenen Gleichungen liefert für die Horizontalprojektion der Durchdringungskurve die Gleichung

$$\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a} + \frac{\sin^2\varphi}{b}\right) = c + \sqrt{c^2 - r^2} \text{ oder}$$

$$r^2 = \frac{2c(\alpha + \beta\cos 2\varphi) - 1}{(\alpha + \beta\cos 2\varphi)^2},$$

wobei zur Abkürzung $\alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $\beta = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ gesetzt wurde.

Somit wird, wenn man etwa $a > c > b$ voraussetzt und zuerst nach r integriert

$$\Omega = 4c \int_{\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{b(a-c)}{a(c-b)}}}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{2c(\alpha+\beta\cos 2\varphi)-1}{(\alpha+\beta\cos 2\varphi)^2}}} \frac{rdr}{\sqrt{c^2-r^2}}.$$

Die Integration nach r ergibt:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2c(\alpha+\beta\cos 2\varphi)-1}{(\alpha+\beta\cos 2\varphi)^2}}} \frac{r\,dr}{\sqrt{c^2-r^2}} = \left[-\sqrt{c^2-r^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{2c(\alpha+\beta\cos 2\varphi)-1}{(\alpha+\beta\cos 2\varphi)^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta\cos 2\varphi}.$$

Folglich wird

$$\Omega = 4c \int_{\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{b(a-c)}{a(c-b)}}}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\alpha+\beta\cos 2\varphi} =$$

$$= \frac{4c}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \left[\operatorname{arctang}\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\operatorname{tang}\varphi\right)\right]_{\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{b(a-c)}{a(c-b)}}}^{\frac{1}{2}\pi} =$$

$$= 8c\sqrt{ab}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang}\sqrt{\frac{a-c}{c-b}}\right].$$

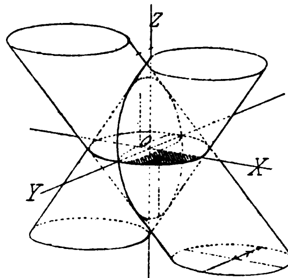
6) Aufg. Es soll derjenige Teil der Mantelfläche des Zylinders

$$(x - z\operatorname{tang}\omega)^2 + y^2 = r^2$$

berechnet werden, welcher innerhalb des Zylinders

$$(x + z\operatorname{tang}\vartheta)^2 + y^2 = r^2$$

liegt.



Lös.: Die beiden gegebenen Zylinder, welche den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ zur gemeinsamen Basis haben, durchdringen sich in einer Kurve, deren Projektionen durch die Gleichungen

$$z = \frac{2x}{\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}\vartheta}, \quad \frac{x^2}{\left(r\,\frac{\operatorname{tang}\vartheta - \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\vartheta + \operatorname{tang}\omega}\right)^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

bestimmt sind. Die Durchdringungskurve ist demnach eine Ellipse mit den Halbachsen

$$r\,\frac{\sqrt{4 + (\operatorname{tang}\vartheta - \operatorname{tang}\omega)^2}}{\operatorname{tang}\vartheta + \operatorname{tang}\omega} \quad \text{und } r.$$

Nun ist

$$z = \frac{x - \sqrt{r^2 - y^2}}{\operatorname{tang}\omega}, \quad p = \operatorname{cotang}\omega, \quad q = \frac{y \operatorname{cotang}\omega}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{\frac{r^2 (1 + \operatorname{cotang}^2\omega) - y^2}{r^2 - y^2}};$$

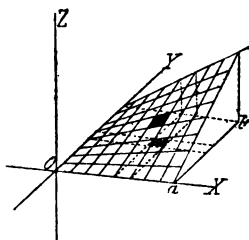
somit wird

$$\Omega = 4 \int_0^r dy \int_{\frac{\operatorname{tang}\vartheta - \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\vartheta + \operatorname{tang}\omega}\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} \sqrt{\frac{r^2 (1 + \operatorname{cotang}^2\omega) - y^2}{r^2 - y^2}}\, dx =$$

$$= \frac{8 \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\vartheta + \operatorname{tang}\omega} \int_0^r \sqrt{r^2 (1 + \operatorname{cotang}^2\omega) - y^2}\, dy =$$

$$= 4r^2 \frac{\sin 2\omega + 2\omega}{\sin 2\omega\, (\operatorname{tang}\vartheta + \operatorname{tang}\omega)}.$$

7) Aufg. Man bestimme den Flächeninhalt eines windschiefen Vierecks auf dem hyperbolischen Paraboloid $z = xy$.



Lös.: Die Begrenzungslinien des windschiefen Vierecks werden vier Erzeugende des gegebenen hyperbolischen Paraboloides sein. Sämtliche Erzeugende der vorgelegten Fläche bilden zwei Scharen von Geraden, von denen die eine der XZ-Ebene, die andere der YZ-Ebene parallel ist. Es ist demnach das Integrationsgebiet ein Rechteck, dessen Seiten der X- und

der Y-Achse beziehungsweise parallel sind. Wird noch die eine Ecke des Rechtecks in den Koordinatenanfangspunkt verlegt und sind a und b die bezüglichen Längen der Rechteckseiten, so hat man zu bilden

$$\Omega = \int_0^b dy \int_0^a \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx = \int_0^b dy \int_0^a \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx =$$

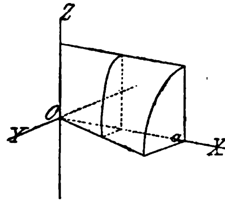
$$= \tfrac{1}{2} \int_0^b \left[a\sqrt{1 + a^2 + y^2} + (1 + y^2)\, l\, \frac{a + \sqrt{1 + a^2 + y^2}}{\sqrt{1 + y^2}} \right] dy =$$

$$= \tfrac{1}{3} ab \sqrt{1 + a^2 + b^2} + \frac{a}{6}(3 + a^2)\, l\, \frac{b + \sqrt{1 + a^2 + b^2}}{\sqrt{1 + a^2}} +$$

$$+ \frac{b}{6}(3 + b^2)\, l\, \frac{a + \sqrt{1 + a^2 + b^2}}{\sqrt{1 + b^2}} - \tfrac{1}{3} \operatorname{arctang} \frac{ab}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

§ 3. Inhaltsberechnungen von Körpern.

1) Aufg. Es soll das Volumen desjenigen Körpers berechnet werden, der von der Fläche $a^2y^2 + x^2z^2 = r^2x^2$ (Conocuneus, s. Bd. I, S. 282) und den Ebenen $x = 0$ und $x = a$ begrenzt wird.



Lös.: $J = \iint z\, dx\, dy.$

Die Begrenzungskurve in der XY-Ebene wird aus der Flächengleichung erhalten, indem man $z = 0$ setzt. Es ergibt sich

$$a^2 y^2 = r^2 x^2,$$

$$y = \pm \frac{rx}{a}.$$

Es soll hier nur die dem Vorzeichen + entsprechende Gerade $y = \frac{r}{a} x$ betrachtet werden.

Die Grenzen für y sind also

$$y = 0 \text{ und } y = \frac{r}{a} x.$$

x soll nach der Aufgabe die Werte $x = 0$ bis $x = a$ annehmen. Daher ist, da der Körper aus 4 kongruenten Teilen besteht

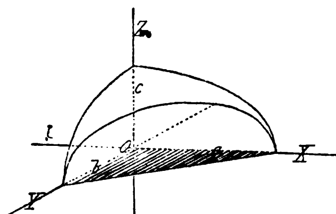
$$J = 4\int_0^a dx \int_0^{\frac{r}{a}x} \sqrt{r^2 - \frac{a^2 y^2}{x^2}}\, dy,$$

$$J = 4\int_0^a dx \cdot \frac{a}{x}\left[\frac{y}{2}\sqrt{\frac{r^2 x^2}{a^2} - y^2} + \frac{1}{2}\frac{r^2 x^2}{a^2} \arcsin \frac{ay}{rx}\right]_{y=0}^{y=\frac{r}{a}x},$$

$$J = 4\int_0^a dx \cdot \frac{r^2 \pi x}{4a},$$

$$J = \frac{\pi a r^2}{2}.$$

2) Aufg. Es soll das Volumen J desjenigen Teiles des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ berechnet werden, welcher durch die Koordinatenebenen und die Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ begrenzt wird.



Lös.: Es ist

$$J = c\int_0^a dx \int_0^{b\left(1 - \frac{x}{a}\right)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy,$$

oder wenn man $x = ax_1$, $y = by_1$ setzt und für x_1, y_1 wieder x, y schreibt:

$$J = abc\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy =$$

$$= \tfrac{1}{2} abc \int_0^1 \left[(1 - x)\sqrt{2(x - x^2)} + (1 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\right] dx =$$

$$= \tfrac{1}{2} abc \left[\tfrac{1}{3} \sqrt{2} \sqrt{x - x^2}^3 + \tfrac{1}{6} \sqrt{2} (2x - 1) \sqrt{x - x^2} + \right.$$

$$+ \tfrac{5}{12} \sqrt{2} \arcsin (2x - 1) + (x - \tfrac{1}{3} x^3) \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} +$$

$$\left. + \tfrac{1}{3} \arcsin \frac{1 - 3x}{1 + x} \right]_0^1 = \tfrac{1}{24} abc \pi (5\sqrt{2} - 4).$$

3) Aufg. Es soll das Volumen des dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bestimmt werden.

Lös.: Zunächst ergibt sich

$$J = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dz.$$

Um konstante Grenzen zu erhalten, setze man

$$x = a\xi, \; y = b\eta \sqrt{1 - \xi^2}, \; z = c\zeta \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)};$$

dann wird das entsprechende Volumenelement

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}, & \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi}, & \frac{\partial z}{\partial \eta}, & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi \, d\eta \, d\zeta = abc (1 - \xi^2) \sqrt{1 - \eta^2} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

und daher

$$J = abc \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) \sqrt{1 - \eta^2} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \tfrac{4}{3} abc \pi.$$

4) Aufg. Man bestimme das Gesamtvolumen des Körpers, welcher durch die Fläche

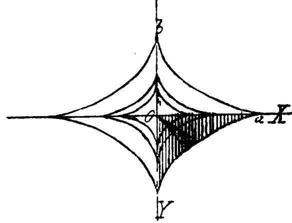
$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

begrenzt wird.

Lös.: Das Integrationsgebiet ist gegeben durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Substituiert man $x = a\cos^3\varphi\sin^3\psi$, $y = b\sin^3\varphi\sin^3\psi$, $z = c\cos^3\psi$, wo φ und ψ zwei neue unabhängige Veränderliche bedeuten, so wird



$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \psi}, & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} d\varphi\, d\psi = \begin{vmatrix} 3a\cos^3\varphi\sin^2\psi\cos\psi, & 3b\sin^3\varphi\sin^2\psi\cos\psi \\ -3a\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^3\psi, & 3b\sin^2\varphi\cos\varphi\sin^3\psi \end{vmatrix} d\varphi\, d\psi =$$

$$= 9ab\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin^5\psi\cos\psi\, d\varphi\, d\psi$$

und $J = 8\cdot 9\,abc\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^5\psi\cos^4\psi\, d\psi =$

$$= \tfrac{64}{35}\, abc\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \tfrac{4}{35}\, abc\,\pi.$$

Welches sind die Kurvensysteme $\varphi = \text{const.}$ und $\psi = \text{const.}$, durch welche bei den hier angewandten Koordinaten das Integrationsgebiet in Elemente zerlegt wird?

5) Aufg. Es soll der kubische Inhalt J des von der XY-Ebene, dem Zylinder $x^2 + y^2 - ax = 0$ und dem Rotationsparaboloid $x^2 + y^2 - cz = 0$ begrenzten Körpers ermittelt werden.

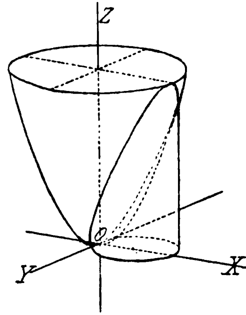
Lös.: Integriert man zuerst nach y, so wird

$$J = 2\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\frac{x^2+y^2}{c}\, dy = \frac{2}{3c}\int_0^a (2x^2 + ax)\sqrt{ax - x^2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3c}\Big[\left(-\tfrac{9}{32}a^3 - \tfrac{3}{16}a^2x + \tfrac{1}{4}ax^2 + \tfrac{1}{2}x^3\right)\sqrt{ax - x^2} +$$

$$+ \tfrac{9}{64}a^4\arcsin\frac{2x - a}{a}\Big]_0^a = \tfrac{3}{32}\frac{a^4\pi}{c}.$$

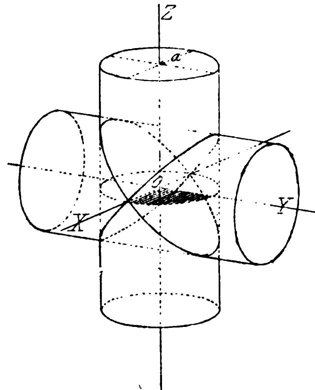
Bei Anwendung von Polarkoordinaten ($x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$) ergibt sich, wenn man zuerst nach ϱ integriert:



$$J = \frac{2}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \varrho^3\, d\varrho = \frac{a^4}{2c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{2c}\Big[\tfrac{1}{32}\sin 4\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi + \tfrac{3}{8}\varphi\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{3}{32}\,\frac{a^4\pi}{c}.$$

6) Aufg. Die Achsen zweier geraden Kreiszylinder von demselben Radius a schneiden sich rechtwinklig. Man bestimme a) das beiden Zylindern gemeinsame Volumen; b) denjenigen Teil der Fläche des einen, welcher innerhalb des andern liegt.



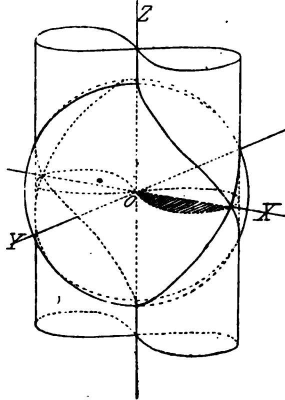
Lös.: Wenn $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichungen der beiden Zylinder sind, so ergibt sich

$$\text{a) } J = 8\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\, dy = 8\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \tfrac{16}{3}a^3.$$

b) Das Flächenstück des ersten Zylinders, welches innerhalb des zweiten liegt, wird

$$\Omega = 8a\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2}} = 8a\int_0^a dx = 8a^2.$$

7) Aufg. Man bestimme das der Kugel $x^2+y^2+z^2=a^2$ und dem vertikalen Zylinder $x^2(x^2+y^2)-a^2(x^2-y^2)=0$ gemeinsame Volumen



Lös.: Für zylindrische Koordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ wird die Gleichung der Kugel $r^2+z^2=a^2$ und diejenige des Zylinders

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}.$$

Demnach ist, wenn man die Integration nach r zuerst ausführt,

$$J = 8\int_0^{\frac{1}{4}\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}\sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}} \sqrt{a^2-r^2}\, r\, dr =$$

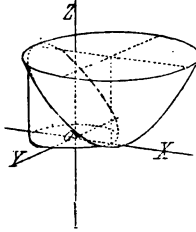
$$= -\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\left[\left(\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\right)^3 - 1\right] d\varphi =$$

$$= -\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(\operatorname{tang}^3\varphi - 1)\, d\varphi = \frac{8a^3}{3}\left[\varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\varphi - l\cos\varphi\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} =$$

$$= \frac{8a^3}{3}\left[\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\, l\, 2\right].$$

8) Aufg. Ein Rotationsparaboloid hat seinen Scheitel in der Basis und seine Achse in der Oberfläche eines Zylinders. Man zeige, daß der Zylinderinhalt durch die Fläche des Para-

boloides im Verhältnis 3 : 5 geteilt wird, wenn Höhe und Durchmesser des Zylinders gleich dem Parameter ($2p$) des Paraboloides sind.



Lös.: Setzt man den Parameter ($2p$) des Paraboloides $= 1$ und verlegt den Koordinatenanfangspunkt in das Zentrum der Zylinderbasis, so lautet die Gleichung des Zylinders:

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}$$

und diejenige des Paraboloides

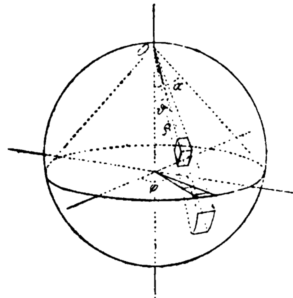
$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = z.$$

Hiernach wird derjenige Teil des Zylinders, welcher außerhalb des Paraboloides liegt, indem man Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ einführt,

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} (r^2 - r\cos\varphi + \tfrac{1}{4})\, r\, dr = \tfrac{3}{32}\pi.$$

Da das Volumen des ganzen Zylinders $J_1 = \frac{1}{4}\pi$, so ist der innerhalb des Paraboloides liegende Teil desselben $J_2 = J_1 - J = = \frac{5}{32}\pi$ und daher $J : J_2 = 3 : 5$.

9) Aufg. Ein gerader Kreiskegel hat seine Spitze auf einer Kugeloberfläche, und seine Achse fällt mit einem Kugeldurchmesser zusammen. Es soll das dem Kegel und der Kugel gemeinsame Volumen bestimmt werden. (Kegel- und Kugelabschnitt.)



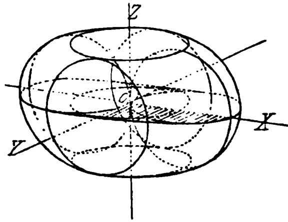
Lös.: Sei α der halbe Winkel an der Kegelspitze und r der Kugelradius. Führt man räumliche Polarkoordinaten ϱ, φ, ϑ ein, deren Pol die Kegelspitze ist, so lautet die Gleichung der Kugel $\varrho = 2r\cos\vartheta$ und diejenige des Kegels $\vartheta = \alpha$. Hiernach ergibt sich für den verlangten kubischen Inhalt

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} d\vartheta \int_0^{2r\cos\vartheta} \varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\alpha} d\vartheta \int_0^{2r\cos\vartheta} \varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho = \tfrac{16}{3} r^3 \pi \int_0^{\alpha} \cos^3\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \tfrac{4}{3} r^3 \pi \, (1 - \cos^4\alpha).$$

10) Aufg. Der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius r bewege sich auf einem zweiten Kreise, der denselben Radius hat, so, daß die Ebenen beider senkrecht stehen und die Ebene des sich bewegenden Kreises stets ihrer Anfangslage parallel ist. Wie groß ist der Inhalt des dadurch erzeugten Körpers?



Lös.: Wird der Mittelpunkt des festen Kreises zum Koordinatenanfangspunkt und die Ebene, welcher die bewegliche Ebene parallel bleiben soll, zur XZ-Ebene gewählt, so ist für jeden Punkt der Fläche, welche durch die Bewegung der Scheibe erzeugt wird,

$$z^2 = r^2 - (x - \sqrt{r^2 - y^2})^2.$$

Hiernach ergibt sich

$$J = 8 \int_0^r dy \int_0^{r + \sqrt{r^2 - y^2}} \sqrt{r^2 - (x - \sqrt{r^2 - y^2})^2} \, dx =$$

$$= 8 \int_0^r \left[\tfrac{1}{4} r^2 \pi + \tfrac{1}{2} y \sqrt{r^2 - y^2} + \tfrac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r} \right] dy =$$

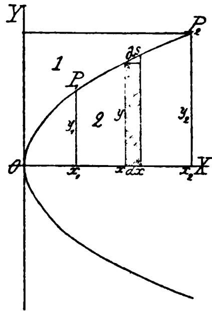
$$= \tfrac{2}{3} r^3 (3\pi + 8).$$

§ 4. Massen- und Schwerpunktsberechnungen.

1) Es ist der Schwerpunkt der Fläche zu finden, die von der X-Achse, der Geraden $x = a$ und dem positiven Zweige der Parabel $y^2 = 2px$ begrenzt wird. (Cf. Teil II, Abt. 1, pag. 127.)

Lös.: $$\xi F = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^a x\,dx \Big[y\Big]_0^{\sqrt{2px}} =$$
$$= \int_0^a x\sqrt{2px}\,dx = \frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}} \sqrt{2p}.$$

Da $F = \int_0^a y\,dx = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} \sqrt{2p}$ ist, so ergibt sich
$$\xi = \frac{3}{5} a.$$
$$\eta F = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{2px}} y\,dy = \int_0^a px\,dy = \frac{pa^2}{2},$$
$$\eta = \frac{3}{8} \sqrt{2pa}.$$



2) Es soll der Schwerpunkt bestimmt werden a) eines durch die konjugierten Halbmesser α und β begrenzten elliptischen Sektors; b) eines elliptischen Segmentes, dessen Sehne die Endpunkte der genannten konjugierten Halbmesser verbindet.

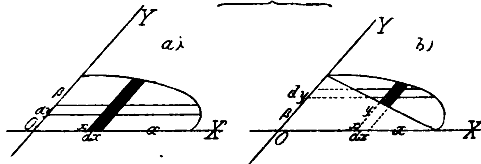
Lös.: Die auf konjugierte Durchmesser bezogene Gleichung der Ellipse lautet:
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Im Falle a) wird

$$\xi = \frac{\int_0^\alpha \int_0^y x\,dx\,dy}{\int_0^\alpha \int_0^y dx\,dy} = \frac{\int_0^\alpha x\sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx}{\int_0^\alpha \sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx} = \frac{4\alpha}{3\pi}$$

und auf ähnliche Weise

$$\eta = \frac{4\beta}{3\pi}.$$



im Falle b)

$$\xi = \frac{\int_0^\alpha \int_{y_1}^{y_2} x\,dx\,dy}{\int_0^\alpha \int_{y_1}^{y_2} dx\,dy},$$

wobei y_2 der Gleichung der Ellipse und y_1 der Gleichung der Sehne $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ zu entnehmen ist. Hiernach wird

$$\xi = \frac{\int_0^\alpha [x\sqrt{\alpha^2 - x^2} - (\alpha - x)\,x]\,dx}{\int_0^\alpha [\sqrt{\alpha^2 - x^2} - (\alpha - x)]\,dx} = \frac{2}{3}\,\frac{\alpha}{\pi - 2} \text{ und } \eta = \frac{2}{3}\,\frac{\beta}{\pi - 2}.$$

3) Man leite die in Teil II, Abt. 1, § 28 angegebenen Formeln für die Schwerpunktskoordinaten einer ebenen Fläche, eines Rotationskörpers und einer Rotationsfläche ab.

Lös.: a) $\xi F = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{f(x)} x\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} x\,f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} x\,y\,dy.$

$$\eta F = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{f(x)} y\,dx\,dy = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx.$$

b) Rotiert die Kurve $y = f(x)$ um die X-Achse und bezeichnet man die Koordinaten eines Punktes der so entstehenden Fläche

mit x, y_1, z, so ist leicht zu ersehen, daß die Gleichung der Rotationsfläche ist

$$z^2 + y_1{}^2 = f(x)^2 \text{ oder}$$

$$z = \sqrt{[f(x)]^2 - y_1{}^2}. \text{ Es ist also}$$

$$\xi J = \int_{x_1}^{x_2} \int_{-f(x)}^{+f(x)} \int_{-\sqrt{[f(x)^2 - y_1{}^2]}}^{+\sqrt{[f(x)]^2 - y_1{}^2}} x \, dz \, dy_1 \, dx,$$

$$\xi J = 2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{-f(x)}^{+f(x)} x \sqrt{f(x)^2 - y_1{}^2} \, dy_1 \, dx,$$

$$\xi J = \pi \int_{x_1}^{x_2} x \, [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} x y^2 \, dx,$$

$$\eta J = \int\int\int y_1 \, dz \, dy_1 \, dx. \text{ (Grenzen wie vorher.)}$$

Führt man dies Integral aus, so erhält man $\eta J = 0$. Ebenso ist $\zeta J = 0$.

c) Aus der obigen Flächengleichung folgt

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f f'}{\sqrt{f^2 - y_1{}^2}}; \; q = \frac{\partial z}{\partial y_1} = - \frac{y_1}{\sqrt{f^2 - y_1{}^2}}.$$

Hierbei ist $f' = \frac{df}{dx}$.

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{f \sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{f^2 - y_1{}^2}}.$$

Dann ist

$$\Omega \xi = 2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{-f(x)}^{+f(x)} x \cdot \frac{f \sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{f^2 - y_1{}^2}} \, dy_1 \, dx,$$

$$\Omega \xi = 2 \int_{x_1}^{x_2} x f \sqrt{1 + f'^2} \left[\arcsin \frac{y_1}{f}\right]_{-f}^{+f} dx,$$

$$\Omega \xi = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \, y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx,$$

$$\Omega \eta = 2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{-f}^{+f} y_1 \frac{f \sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{f^2 - y_1{}^2}} \, dy \, dx,$$

$$\Omega \eta = 2 \int_{x_1}^{x_2} f \sqrt{1 + f'^2} \left[- \sqrt{f^2 - y_1{}^2}\right]_{-f}^{+f} dx,$$

$$\Omega \eta = 0.$$

$\Omega\zeta$ muß $= 0$ sein, da man die Y- und Z-Achse aus Symmetriegründen ohne weiteres vertauschen kann.

4) Es ist der Schwerpunkt der Fläche eines Kugeloktanten zu ermitteln.

Lös.: Es ist $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, also $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \text{ also}$$

$$\Omega\xi = r\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - y^2}} \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = r\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\,dy,$$

$$\Omega\xi = \frac{r^3\pi}{4}. \text{ Nun ist aber } \Omega = \frac{4r^2\pi}{8} = \frac{\pi r^2}{2}, \text{ also}$$

$$\xi = \frac{r}{2}. \text{ Ebenso findet man } \eta \text{ und } \zeta = \frac{r}{2},$$

was schon aus Symmetriegründen klar ist.

Führt man räumliche Polarkoordinaten ein durch die Gleichungen

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$z = r \cos\vartheta, \text{ so wird } dF = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \text{ also}$$

$$\Omega\xi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2\vartheta \cos\varphi\, d\vartheta\, d\varphi,$$

ein Integral, das sich noch bequemer ausführen läßt. Entsprechend findet man $\Omega\eta$ und $\Omega\zeta$.

5) Es soll der Schwerpunkt eines sphärischen rechtwinkligen Dreiecks gefunden werden.

Lös.: Mögen die Ecken des Dreiecks mit A, B, C, die gegenüberliegenden Seiten respektive mit a, b, c bezeichnet werden. Ferner sei der Einfachheit wegen der Radius der Kugel $= 1$ und die Lage des Koordinatensystems so gewählt, daß der Anfangspunkt der Koordinaten im Mittelpunkt der Kugel, die sphärische Seite b in der XY-Ebene und die Seite a in der XZ-Ebene liegt, so daß also der sphärische Winkel C ein rechter

Winkel ist. — Bezeichnet man nun die Fläche des Dreiecks mit F, die Koordinaten ihres Schwerpunkts mit ξ, η, ζ, so wird



$$F = \iint \frac{dx \cdot dy}{z} = \iint \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

$$F \cdot \xi = \iint \frac{x}{z} \cdot dx \cdot dy = \iint \frac{x\, dx\, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

$$F \cdot \eta = \iint \frac{y}{z} \cdot dx \cdot dy = \iint \frac{y\, dx\, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

$$F \cdot \zeta = \iint dx \cdot dy.$$

Setzt man hierin zur Vereinfachung der Rechnung

$$\frac{\sin a \cdot \operatorname{cotang} b \cdot y}{\sqrt{1 - y^2}} = \sin u$$

und integriert zunächst nach x zwischen den Grenzen

$$x = \sqrt{1 - y^2} \cdot \cos (a - u) \text{ und } x = \sqrt{1 - y^2},$$

so erhält man:

$$F = \int (a - u) \cdot dy,$$

$$F \cdot \xi = \int \sin (a - u) \cdot \sqrt{1 - y^2} \cdot dy,$$

$$F \cdot \eta = \int (a - u) \cdot y \cdot dy,$$

$$F \cdot \zeta = \int [1 - \cos (a - u)] \cdot \sqrt{1 - y^2} \cdot dy.$$

Wenn man diese Integrale von

$$y = 0 \text{ bis } y = \sin b$$

oder in bezug auf u von

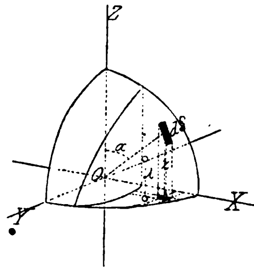
$$u = 0 \text{ bis } u = a$$

ausdehnt, so ergibt sich:

$$F = A + B - \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$F \cdot \xi = \tfrac{1}{2}c \cdot \sin B \cdot \sin a,$$
$$F \cdot \eta = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}c \cdot \cos B,$$
$$F \cdot \zeta = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c \cdot \cos A.$$

6) Man beweise den Satz: Bezeichnet man mit S die Fläche einer beliebigen Figur auf der Oberfläche der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, mit S_x, S_y, S_z deren Projektionen resp. auf die YZ-, XZ- und XY-Ebene und mit ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche S, so bestehen die Proportionen

$$\frac{\xi}{S_x} = \frac{\eta}{S_y} = \frac{\zeta}{S_z} = \frac{r}{S}.$$



Bew. Sei S_λ die orthogonale Projektion der Fläche S auf irgend eine Diametralebene der Kugel, dS das Element dieser Fläche, λ die Entfernung der Ebene vom Schwerpunkt der Fläche S und α der Winkel, den der nach dem Element dS gezogene Kugelradius mit der Normale auf die Ebene einschließt; dann ist, wenn man noch die Entfernung des Elementes dS von der Ebene mit z bezeichnet

$$\lambda S = \int z dS.$$

Nun hat man aber $z = r \cos \alpha$, $\int \cos \alpha \, dS = S_\lambda$, folglich wird

$$\lambda S = r S_\lambda \text{ oder } \frac{\lambda}{S_\lambda} = \frac{r}{S}.$$

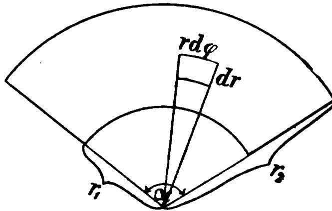
(Giulio, Journal de Math. de Liouville, t. IV, p. 386.

7) Es soll die Masse einer von zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 begrenzten Fläche berechnet werden, wenn die Dichtigkeit in den der kleineren Peripherie anliegenden Flächenelementen $= a$ ist und mit der $n$ten Potenz der Entfernung vom Mittelpunkt a) zunimmt, b) abnimmt.

Lös.: a) $M = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{ar^n}{r_1^n} r\, d\varphi\, dr = \frac{2\pi a}{r_1^n (n+2)} (r_2^{n+2} - r_1^{n+2})$,

b) $M = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{ar_1^n}{r^n} r\, d\varphi\, dr = \frac{2\pi a r_1^n}{n-2} \left(\frac{1}{r_1^{n-2}} - \frac{1}{r_2^{n-2}}\right)$.

8) Aus der in der vorigen Aufgabe beschriebenen Fläche soll ein Stück herausgeschnitten werden durch zwei Gerade, die vom Mittelpunkt ausgehen und miteinander den Winkel α bilden. Wo liegt der Schwerpunkt der so entstandenen Fläche, wenn die Massenverteilung dieselbe ist wie vorher?



a) Führt man Polarkoordinaten ein, so ist

$$\xi M = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\alpha} r \cos\varphi \cdot \frac{a r^n}{r_1^n} \cdot r\, d\varphi\, dr,$$

$$\xi M = \frac{a \sin\alpha}{r_1^n (n+3)} \left(r_2^{n+3} - r_1^{n+3}\right).$$

Die Masse des Ausschnitts verhält sich zu der Masse des ganzen Kreisringes wie $\alpha : 2\pi$, also ist

$$M = \frac{\alpha a}{r_1^n (n+2)} (r_2^{n+2} - r_1^{n+2}),$$

$$\xi = \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r_2^{n+3} - r_1^{n+3}}{r_2^{n+2} - r_1^{n+2}},$$

$$\eta M = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\alpha} r \sin\varphi \cdot \frac{a r^n}{r_1^n} \cdot r\, d\varphi\, dr,$$

$$\eta = \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r_2^{n+3} - r_1^{n+3}}{r_2^{n+2} - r_1^{n+2}}.$$

Der Mittelpunkt liegt also auf der Halbierungslinie des Winkels α, denn $\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$, und hat vom Mittelpunkt die Entfernung

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} \cdot \frac{r_2^{n+3} - r_1^{n+3}}{r_2^{n+2} - r_1^{n+2}}.$$

b) $$\xi = \frac{n-2}{n-3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{r_1^{n-3} - r_2^{n-3}}{r_1 r_2 (r_1^{n-2} - r_2^{n-2})}.$$

Bei η und ϱ ist nur der α enthaltende Faktor entsprechend zu ändern.

9) Es ist der Schwerpunkt des Oktanten eines dreiachsigen Ellipsoids zu bestimmen.

Lös.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$,

$$J\xi = \int_0^c \int_0^{b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}} \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}} x\,dx\,dy\,dz,$$

$$J\xi = \frac{a^2}{2} \int_0^c \int_0^{b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) dy\,dz,$$

$$J\xi = \frac{a^2 b}{3} \int_0^c \sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^3}\, dz,$$

$$J\xi = \frac{a^2 b c \pi}{16},$$

$$J = \frac{abc\pi}{6} \text{ (vgl. § 3 Aufg. 3)},$$

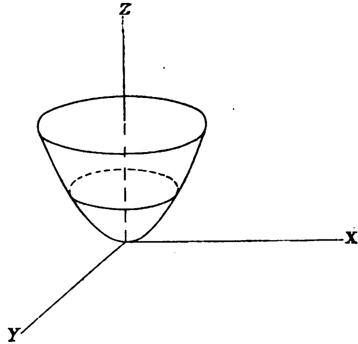
$$\xi = \frac{3}{8} a. \text{ Ebenso ist } \eta = \frac{3}{8} b, \ \zeta = \frac{3}{8} c.$$

10) Der Schwerpunkt eines Oktanten des elliptischen Paraboloides $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0$ ist zu ermitteln, wobei das Paraboloid durch die Ebene $z = c$ begrenzt gedacht wird.

Lös.: $$\xi J = \int_0^c \int_0^{b\sqrt{\frac{2z}{c}}} \int_0^{a\sqrt{\frac{2z}{c}-\frac{y^2}{b^2}}} x\,dx\,dy\,dz,$$

$$\xi J = \frac{a^2}{2}\int_0^c \int_0^{b\sqrt{\frac{2z}{c}}} \left(\frac{2z}{c} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy\, dz,$$

$$\xi J = \frac{2a^2 b}{3c}\sqrt{\frac{2}{c}}\int_0^c z^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{15} a^2 b c \sqrt{2}\,.$$



Den Inhalt berechnet man am einfachsten, indem man durch den Körper Parallelebenen zur XY-Ebene legt, die elliptische Querschnitte erzeugen, deren Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{2z}{c}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{2z}{c}}\right)^2} = 1.$$

Der Inhalt eines Quadranten ist

$$f = \frac{\pi}{4}\left(a\sqrt{\frac{2z}{c}}\right)\left(b\sqrt{\frac{2z}{c}}\right) = \frac{abz\pi}{2},$$

daher ist das Volumen des Paraboloidoktanten

$$J = \int_0^c f\, dz = \frac{ab\pi}{2}\int_0^c z\, dz = \frac{abc\pi}{2}.$$

Es ist also

$$\xi = \frac{16a\sqrt{2}}{15\pi}, \text{ ebenso findet sich } \eta = \frac{16b\sqrt{2}}{15\pi}, \quad \zeta = \frac{2}{3}c.$$

11) Es soll die Masse und der Schwerpunkt eines Parallelepipedons mit den Kanten a, b, c bestimmt werden, wenn die Dichtigkeit mit dem Quadrat der Entfernung von einer Ecke wächst und im Abstande p von derselben den Wert ϱ_0 besitzt.

Lös.: Der Ausdruck für die Dichtigkeit ist

$$\varrho = \frac{\varrho_0 (x^2 + y^2 + z^2)}{p^2}.$$

$$M = \frac{\varrho_0}{p^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx,$$

$$M = \frac{a\, b\, c\, \varrho_0}{3p^2} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Bezeichnet man die Dichtigkeit in der der Ausgangsecke gegenüberliegenden Ecke mit ϱ_1, so ergibt sich

$$M = \frac{J \cdot \varrho_1}{3}.$$

$$\xi M = \frac{\varrho_0}{p^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^c x\, (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx,$$

$$\xi M = \frac{\varrho_0\, a^2 b\, c}{12 p^2} (3a^2 + 2b^2 + 2c^2).$$

Bezeichnet man die Dichtigkeit im Punkte $\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}$ mit ϱ_2, so ist

$$\xi M = \frac{a M}{2} + a J \varrho_2,$$

$$\xi = \frac{a}{2} \left(1 + 6 \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right).$$

Entsprechend findet man η und ζ.

12) Man berechne die Masse und die Schwerpunktskoordinaten ξ und η des Körpers, der in § 3, Aufg. 2) beschrieben ist, wenn die Dichtigkeitsverteilung nach dem Gesetze $\varrho = \frac{\varrho_0\, x\, y\, z}{p^3}$ stattfindet.

Lös.: $$M = \frac{\varrho_0}{p^3} \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} x\, y\, z\, dx\, dy\, dz,$$

$$M = \frac{\varrho_0\, a^2\, b^2\, c^2}{80 p^3},$$

$$\xi M = \frac{\varrho_0}{p^3} \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} x^2\, y\, z\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \frac{\varrho_0\, a^3 b^2 c^2}{210 p^3},$$

$$\xi = \frac{8}{21} a,$$

$$\eta M = \frac{\varrho_0}{p^3} \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} x y^2 z \, dz \, dy \, dx =$$

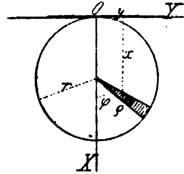
$$= \frac{\varrho_0 a^2 b^3 c^2}{210 p^3},$$

$$\eta = \frac{8}{21} b.$$

13) Der Druckmittelpunkt einer ebenen, in eine Flüssigkeit getauchten Fläche ist bestimmt durch seine Koordinaten

$$\xi = \frac{\int xpdF}{\int pdF}, \quad \eta = \frac{\int ypdF}{\int pdF},$$

wo p den Druck bedeutet, den die Flüssigkeit auf die Flächeneinheit ausübt und x, y die Koordinaten sind, welche dem Flächenelement dF in bezug auf ein recht- oder schiefwinkliges Koordinatensystem in der betrachteten Fläche zukommen.



Man bestimme mit Hilfe dieser Formeln den Druckmittelpunkt a) eines vertikalen Kreises vom Radius r, dessen Peripherie die Oberfläche der Flüssigkeit berührt; b) eines vollständig untergetauchten Dreiecks mit nach oben gekehrter Spitze, dessen Ebene vertikal und dessen Basis horizontal ist; c) eines Flächenstückes, welches begrenzt wird durch eine Parabel, durch die Achse derselben und durch eine dazu senkrechte, in der freien Oberfläche der Flüssigkeit liegende Ordinate; d) der Basis eines geraden Kreiszylinders vom Radius r, dessen Achse mit der Vertikalen den Winkel α bildet, wenn das im Zylinder enthaltene Flüssigkeitsvolumen $= c^3$.

Lös.: a) Wird die Vertikale, welche durch das Zentrum des Kreises geht, zur X-Achse, die Kreistangente, welche in der Ober-

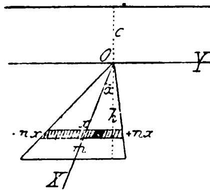
fläche der Flüssigkeit liegt, zur Y-Achse und ihr Berührungspunkt zum Koordinatenanfangspunkt genommen, so ist

$$\xi = \frac{\int\int x^2\, dx\, dy}{\int\int x\, dx\, dy}, \quad \eta = 0.$$

Wenn man noch zur Berechnung von ξ Polarkoordinaten $x = r + \varrho \cos \varphi$, $\eta = \varrho \sin \varphi$ einführt, für welche das Zentrum des Kreises der Pol ist, so ergibt sich

$$\xi = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r (r + \varrho \cos \varphi)^2 \varrho\, d\varrho}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r (r + \varrho \cos \varphi)\, \varrho\, d\varrho} =$$

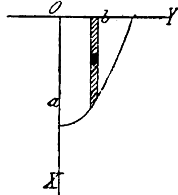
$$= r \frac{\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi)\, d\varphi}{\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos \varphi)\, d\varphi} = \frac{5}{4} r.$$



b) Sei h die Höhe des Dreiecks, m die Länge der Geraden, welche die Spitze mit der Mitte der Basis verbindet und c die Entfernung der Spitze vom Flüssigkeitsspiegel. Wählt man nun die genannte Mittellinie zur X-Achse und eine Parallele zur Basis durch die Spitze zur Y-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems, so lauten die Gleichungen der Dreieckseiten, welche sich in der Spitze treffen: $y = nx$, $y = -nx$, wenn $\pm n$ den Winkelkoeffizienten bedeutet. Wird noch der Winkel, den die X-Achse mit der Höhe bildet, mit α bezeichnet, so ergibt sich

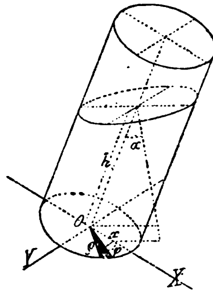
$$\eta = 0 \text{ und } \xi = \frac{\int_0^m (c + x \cos \alpha)\, x\, dx \int_{-nx}^{+nx} dy}{\int_0^m (c + x \cos \alpha)\, dx \int_{-nx}^{+nx} dy} =$$

$$= \frac{2n\int_0^m x^2 (c + x\cos\alpha)\,dx}{2n\int_0^m x\,(c + x\cos\alpha)\,dx} = m\,\frac{4c+3h}{6c+4h}.$$



c) Hat das untergetauchte Stück der Parabelachse die Länge a, die im Flüssigkeitsspiegel liegende Ordinate die Länge b und macht man die Achse der Parabel zur X-Achse, die Schnittlinie der Parabelebene mit dem Flüssigkeitsspiegel zur Y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist die Gleichung der Parabel $y^2 = \frac{b^2}{a}(a - x)$. Daher wird

$$\xi = \frac{\int_0^b dy \int_0^{a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)} x^2\,dx}{\int_0^b dy \int_0^{a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)} x\,dx} = \tfrac{4}{7}\,a,\quad \eta = \frac{\int_0^b y\,dy \int_0^{a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)} x\,dx}{\int_0^b dy \int_0^{a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)} x\,dx} = \tfrac{5}{16}\,b.$$



d) Verlegt man den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems in das Zentrum der Basis, so wird, wenn h die Länge des untergetauchten Stückes der Zylinderachse bezeichnet,

$$h = \frac{c^3}{r^2\pi},\quad p = h\cos\alpha + x\sin\alpha.$$

Für die Entfernung des Druckmittelpunktes vom Zentrum der Basis ergibt sich, indem man zum Zwecke der Integration Polarkoordinaten ($x = \varrho \cos \varphi,\ y = \varrho \sin \varphi$) anwendet,

$$\xi = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r (h \cos \alpha + \varrho \sin \alpha \cos \varphi)\, \varrho \cos \varphi\, \varrho\, d\varrho}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r (h \cos \alpha + \varrho \sin \alpha \cos \varphi)\, \varrho\, d\varrho} = \frac{\pi r^4 \operatorname{tang} \alpha}{4c^3}.$$

§ 5. Berechnungen von Trägheitsmomenten.

1) Es ist das Trägheitsmoment und der Trägheitsradius einer Ellipsenfläche zu bestimmen, deren Dichtigkeit konstant $= \varrho$ ist,

a) wenn die Achse mit einer der Ellipsenachsen zusammenfällt,

b) wenn die Achse im Mittelpunkt auf der Ellipsenfläche senkrecht steht.

Lös.: a) Das Trägheitsmoment in bezug auf die X-Achse ist

$$T_x = 4\varrho \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y^2\, dy\, dx = \frac{4\varrho b^3}{3} \int_0^a \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^3}\, dx =$$

$$= \frac{\varrho a b^3 \pi}{4}.$$

Nun ist aber die Masse der Ellipsenfläche $M = \varrho a b \pi$, also ist $T_x = \frac{b^2 M}{4}$. Der Trägheitsradius R_x ist bestimmt durch die Gleichung $R_x^2 M = T_x$, also ist $R_x = \frac{b}{2}$.

Entsprechend findet man

$$T_y = 4\varrho \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} x^2\, dy\, dx = \frac{a^2 M}{4},\quad R_y = \frac{a}{2}.$$

b) $$T = 4\varrho \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = T_x + T_y =$$

$$= \frac{M}{4}(a^2 + b^2).$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

2) Wie groß ist Trägheitsmoment und Trägheitsradius eines geraden Kreiszylinders in bezug auf seine Achse?

Lös.: Wendet man zylindrische Koordinaten an, so ist

$$T = \varrho \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} r^3 \, dr \, d\varphi \, dz,$$

$$T = \frac{\varrho c r_1^4}{2} = \frac{M r_1^2}{2},$$

$$R = \frac{r_1}{2} \sqrt{2}.$$

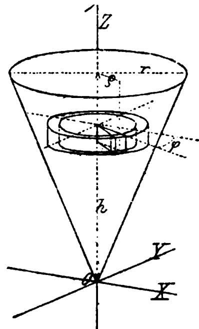
3) Man berechne Trägheitsmoment und Trägheitsradius eines geraden Kreiszylinders in bezug auf eine Erzeugende des Zylindermantels als Achse.

Lös.: $$T = 2\varrho \int_0^c \int_0^{2r_1} \int_0^{\sqrt{x(2r_1 - x)}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz,$$

$$T = \frac{4\varrho}{3} \int_0^c \int_0^{2r_1} (r_1 x + x^2) \sqrt{x(2r_1 - z)} \, dx \, dz,$$

$$T = \frac{4\varrho}{3} \int_0^c \frac{9}{8} r_1{}^4 \pi \, dz = \frac{3 \varrho c r_1{}^4 \pi}{2} = \frac{3}{2} M r_1^2.$$

4) Aufg. Es soll das Trägheitsmoment eines homogenen geraden Kreiskegels in bezug auf seine Achse berechnet werden.



Lös.: Die Gleichung des Kegels, dessen Höhe h und dessen Basisradius r sein möge, lautet:

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} z^2.$$

Für das gesuchte Trägheitsmoment findet sich nun, wenn man

zylindrische Koordinaten $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = z$ einführt und die konstante Dichtigkeit des Kegels mit γ bezeichnet:

$$T = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{\frac{r z}{h}} \varrho^3 \, d\varrho = \tfrac{1}{10} \gamma \pi r^4 h = \tfrac{3}{10} r^2 M,$$

wo M die Masse des Kegels bedeutet.

5) Aufg. Man berechne die Trägheitsmomente des in § 3, Aufg. 3) genannten homogenen Ellipsoids in bezug auf dessen drei Achsen.

Lös.: Bestimmt man mit Hilfe derselben Koordinaten, wie in dieser Aufgabe, die drei Integrale

$$A = \int_{-a}^{+a} x^2 \, dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz =$$

$$= a^3 bc \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \xi^2 (1 - \xi^2) \sqrt{1 - \eta^2} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta =$$

$$= \tfrac{4}{15} a^3 bc \pi = \tfrac{1}{5} a^2 M,$$

$$B = ab^3 c \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^2 \eta^2 \sqrt{1 - \eta^2} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta =$$

$$= \tfrac{4}{15} ab^3 c \pi = \tfrac{1}{5} b^2 M \text{ und}$$

$$C = abc^3 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^2 (1 - \eta^2) \sqrt{1 - \eta^2} \, \zeta^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta =$$

$$= \tfrac{4}{15} abc^3 \pi = \tfrac{1}{5} c^2 M,$$

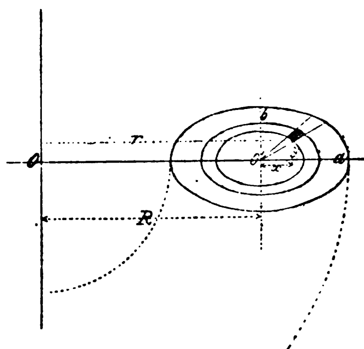
wo M die Masse des Ellipsoids bedeutet, dessen Dichtigkeit $= 1$ vorausgesetzt wird, so sind die gesuchten Trägheitsmomente in bezug auf die X-, Y- und Z-Achse resp.

$$B + C = \frac{b^2 + c^2}{5} M, \quad A + C = \frac{a^2 + c^2}{5} M, \quad A + B = \frac{a^2 + b^2}{5} M.$$

6) Aufg. Es soll das Trägheitsmoment eines homogenen elliptischen Kreisringes in bezug auf dessen Rotationsachse bestimmt werden.

Lös.: Die rotierende Ellipse, als affine Figur eines Kreises betrachtet, kann dargestellt werden durch die Gleichungen

$$x = a\varrho \cos \varphi, \quad y = b\varrho \sin \varphi.$$



Bezeichnet R die Entfernung des Ellipsenmittelpunktes von der Rotationsachse, $r = R + x = R + a\varrho \cos\varphi$ diejenige eines Volumenelementes dV von derselben Achse und γ die Dichtigkeit des Körpers, so wird das gesuchte Trägheitsmoment ausgedrückt durch das dreifache Integral $T = \gamma \int\int\int r^2 \, dV$, welches über den gesamten Rotationskörper zu erstrecken ist. Das Volumenelement dV kann angesehen werden als ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Basis das Ellipsenelement $ab\,\varrho\, d\varrho\, d\varphi$ und dessen Höhe gleich $r\,d\psi$ ist, wenn ψ den Winkel bedeutet, den die erzeugende Ellipse in irgend einer ihrer Lagen mit der Anfangslage bildet. Sonach ist

$$dV = ab\varrho\, d\varphi\, d\varrho\, r\, d\psi \quad \text{und}$$

$$T = \gamma ab \int_0^1 d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \varrho\, r^3\, d\psi =$$

$$= \gamma ab \int_0^1 d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (R + a\varrho\cos\varphi)^3\, \varrho\, d\psi =$$

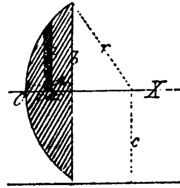
$$= 2\gamma\, ab\, \pi^2 R\,(R^2 + \tfrac{3}{4}a^2).$$

7) Aufg. Es soll der Trägheitshalbmesser einer bikonvexen homogenen Linse, welche durch zwei kongruente Kugelflächen geschlossen wird, für eine Parallele zur Rotationsachse gefunden werden.

Lös.: Es genügt offenbar, die Rechnung nur für eine der beiden plan-konvexen Linsen durchzuführen, welche zusammen die vorausgesetzte Linse bilden.

Sei r der Radius der Kugel, a der Pfeil, b der Radius der

Basis, M die Masse und γ die Dichtigkeit der plan-konvexen Linse, k der Trägheitsradius für die gegebene Achse, k' derjenige für die Rotationsachse der Linse und c die Distanz der beiden Achsen. Zur Berechnung von k' betrachten wir im Abstande x vom Scheitel der Linse eine Scheibe vom Radius y und der Dicke dx. Diese werde durch Radien und konzentrische Kreise in Elementarteile zerlegt. Das Trägheitsmoment dieser Scheibe für die Rotationsachse wird dann



$$T_1 = \gamma\, dx \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2rx - x^2}} y^2 \cdot y\, d\varphi\, dy = \tfrac{1}{2}\pi\gamma\,(2rx - x^2)^2\, dx,$$

folglich das Trägheitsmoment der ganzen plan-konvexen Linse

$$T = Mk'^2 = \tfrac{1}{2}\pi\gamma \int_0^a (2rx - x^2)^2\, dx = \tfrac{1}{2}\pi\gamma\,(\tfrac{4}{3}r^2 a^3 - ra^4 + \tfrac{1}{5}a^5).$$

Da aber $r = \dfrac{a^2 + b^2}{2a}$, so ist auch

$$Mk'^2 = \tfrac{1}{2}\pi\gamma\,[\tfrac{1}{3}a\,(a^2 + b^2)^2 - \tfrac{1}{2}a^3\,(a^2 + b^2) + \tfrac{1}{5}a^5] =$$
$$= \tfrac{1}{60}\pi a\gamma\,(a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4).$$

Nun ist $M = \frac{1}{6}\pi\gamma\,(a^3 + 3ab^2)$, folglich

$$k'^2 = \tfrac{1}{10}\,\frac{a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4}{a^2 + 3b^2}.$$

Nach einem bekannten Satze der Mechanik wird endlich

$$k^2 = k'^2 + c^2.$$

(Euler, *Theoria motus corporum solidorum*, cap. VI, prob. 42.)

8) Man bestimme die Trägheitsmomente des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in bezug auf seine drei Achsen unter der Voraussetzung, daß die Dichtigkeit ε nach dem Gesetz $\varepsilon = \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2}$ variiere.

Lös.: Berechnet man zunächst die drei Integrale

$$A = \int_0^z dz \int_0^y dy \int_0^x x^2 \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right) dx,$$

$$B = \int_0^z dz \int_0^y dy \int_0^x y^2 \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right) dx,$$

$$C = \int_0^z dz \int_0^y dy \int_0^x z^2 \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right) dx,$$

wobei die oberen Grenzen resp.

$$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}, \quad y = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}},$$

$z = c$ sind, so werden die Trägheitsmomente für die X-, Y- und Z-Achse beziehungsweise

$$T_a = 8(B + C) = \frac{8}{210}\pi abc \left[\frac{a^2}{\alpha^2}(b^2 + c^2) + 3\left(\frac{b^4}{\beta^2} + \frac{c^4}{\gamma^2}\right) + \right.$$
$$\left. + b^2 c^2 \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\right],$$

$$T_b = 8(A + C) = \frac{8}{210}\pi abc \left[\frac{b^2}{\beta^2}(c^2 + a^2) + 3\left(\frac{c^4}{\gamma^2} + \frac{a^4}{\alpha^2}\right) + \right.$$
$$\left. + c^2 a^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right)\right],$$

$$T_c = 8(A + B) = \frac{8}{210}\pi abc \left[\frac{c^2}{\gamma^2}(a^2 + b^2) + 3\left(\frac{a^4}{\alpha^2} + \frac{b^4}{\beta^2}\right) + \right.$$
$$\left. + a^2 b^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)\right].$$

9) Man beweise den Satz: Das Trägheitsmoment in bezug auf eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmoment in bezug auf die durch den Schwerpunkt zu ihr gezogene Parallele, vermehrt um das Trägheitsmoment der im Schwerpunkt konzentriert gedachten Masse in bezug auf die erste Achse.

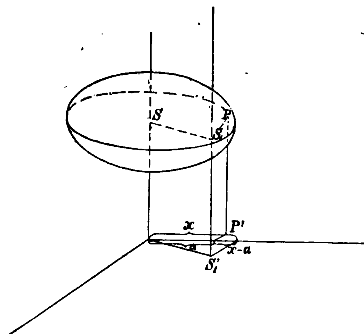
Hierdurch läßt sich die eben behandelte Aufgabe auf die vorige zurückführen.

Lös.: Nimmt man die durch den Schwerpunkt gehende Achse als Z-Achse des Koordinatensystems an, den Schwerpunkt als Nullpunkt desselben und ist die neue Achse durch die Gleichungen $x = a$, $y = b$ gekennzeichnet, so ist das Trägheitsmoment in bezug auf die erste Achse, wenn ϱ die Dichtigkeit ist

$$T = \iiint \varrho\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz;$$

in bezug auf die zweite Achse

$$T_1 = \iiint \varrho \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] dx\,dy\,dz.$$



Die Grenzen sind in beiden Fällen die gleichen; sie sind so zu wählen, daß alle Punkte des Körpers berücksichtigt werden. Nun ist

$$T_1 = \iiint \varrho\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz - 2a \iiint \varrho\,x\,dx\,dy\,dz -$$
$$- 2b \iiint \varrho\,y\,dx\,dy\,dz + (a^2 + b^2) \iiint \varrho\,dx\,dy\,dz.$$

Nach den Schwerpunktsformeln stellen die beiden in der Mitte stehenden Integrale das Produkt aus den Schwerpunktskoordinaten und der Masse vor, da aber die ersteren $= 0$ sind, so verschwinden sie auch. Also ist

$$T_1 = T + (a^2 + b^2)\,M.$$

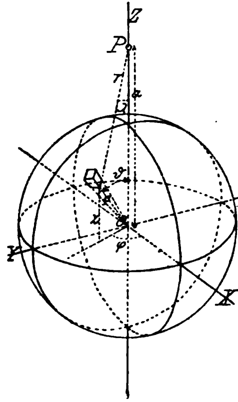
§ 6. Aufgaben aus der Potentialtheorie.

1) Es ist die Anziehung zu berechnen, die eine homogene Vollkugel vom Radius R auf einen außerhalb der Kugel liegenden materiellen Punkt ausübt.

Lös.: Der gegebene Punkt P liege auf der Z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt der

Mittelpunkt der Kugel ist. Bezeichnet man mit m' die Masse des gegebenen Punktes P und mit γ die konstante Dichtigkeit der Kugel, ist ferner a die Entfernung des gegebenen Punktes, ϱ diejenige eines Massenelementes dm der Kugel vom Mittelpunkt derselben und r die Entfernung dieses Elementes von P, so wird das Element der gesuchten Anziehung nach dem Newton'schen Attraktionsgesetz ausgedrückt durch $\frac{m'\,dm}{r^2}$. Wendet man räumliche Polarkoordinaten an, so ist

$$dm = \gamma\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi,\quad r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\vartheta,$$



wo ϑ und φ die bekannte Bedeutung haben. Die beiden Komponenten der gesamten Anziehung, welche senkrecht zur Z-Achse sind, werden offenbar gleich Null. Für das Element der Z-Komponente ergibt sich, wenn man den Winkel, den die von P nach dm gezogene Gerade mit der Z-Achse bildet, mit ψ bezeichnet:

$$\frac{m'\,dm}{r^2}\cos\psi.$$

Nun ist $\cos\psi = \frac{a - \varrho\cos\vartheta}{r}$; daher wird

$$\frac{m'\,dm}{r^2}\cos\psi = \gamma m' \frac{(a - \varrho\cos\vartheta)\,\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi}{(a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und}$$

$$A = \gamma m' \int_{\varrho=0}^{\varrho=R} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{(a - \varrho \cos \vartheta)\, \varrho^2 \sin \vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi}{(a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\pi\gamma m' \int_{\varrho=0}^{\varrho=R} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \frac{(a - \varrho \cos \vartheta)\, \varrho^2 \sin \vartheta\, d\varrho\, d\vartheta}{(a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integration nach ϑ liefert:

$$\frac{\pi\gamma m'}{a^2} \left[\varrho \sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos \vartheta} - \frac{\varrho (a^2 - \varrho^2)}{\sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos \vartheta}} \right]_0^\pi =$$

$$= \frac{\pi\gamma m'}{a^2} \left[\varrho (a + \varrho) - \varrho (a - \varrho) - \varrho (a^2 - \varrho^2) \left(\frac{1}{a + \varrho} - \frac{1}{a - \varrho} \right) \right] =$$

$$= \frac{4\pi\gamma m'}{a^2} \varrho^2.$$

Wird dieser Ausdruck noch mit $d\varrho$ multipliziert und zwischen den Grenzen 0 und R integriert, so findet sich für die verlangte Anziehung

$$A = \frac{4}{3} \frac{\gamma m' \pi}{a^2} R^3 \text{ oder } A = \frac{M m'}{a^2},$$

wenn M die Gesamtmasse der Kugel bedeutet. Aus diesem Resultate erhellt, daß die Kugel auf den gegebenen Punkt dieselbe Anziehung ausübt, wie wenn ihre Gesamtmasse im Mittelpunkte konzentriert wäre.

Anm. Die hier durchgeführte Rechnung bleibt auch noch gültig für den Fall, daß der gegebene Punkt sich auf der Oberfläche der Kugel befindet. Unter der Voraussetzung $a = R$ ist

$$A = m' \frac{\frac{4}{3}\gamma\pi R^3}{R^2} = \frac{Mm'}{R^2}.$$

Liegt der gegebene Punkt dagegen im Innern der Kugel, so gestaltet sich die Rechnung wesentlich anders. Um z. B. die Anziehung einer hohlen, unendlich dünnen, homogenen Kugelschale vom Radius ϱ und der Dicke $d\varrho$ auf einen in ihrem Inneren gelegenen materiellen Punkt zu erhalten, muß in der obigen Rechnung, nachdem die Integrationen nach φ und ϑ in der angegebenen Weise ausgeführt sind, beim Einsetzen der unteren Grenze $\vartheta = 0$ für $\sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho}$ der Wert $(\varrho - a)$ genommen werden, da in diesem Falle $\varrho > a$ ist. Es wird demnach

$$\frac{\pi\gamma m'}{a^2}\,d\varrho\left[\varrho\sqrt{a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\vartheta}-\frac{\varrho\,(a^2-\varrho^2)}{\sqrt{a^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\vartheta}}\right]_0^\pi=$$

$$=\frac{\pi\gamma m'}{a^2}\,d\varrho\,[2a\varrho-2a\varrho]=0.$$

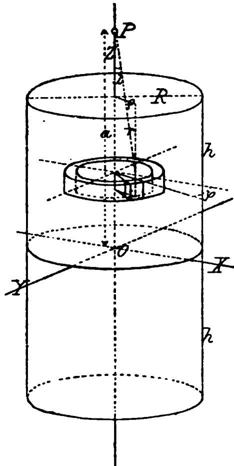
Mithin übt eine unendlich dünne, hohle Kugelschale auf einen Punkt in ihrem Inneren gar keine Anziehung aus. Führt man die Integration nach ϱ zwischen entsprechenden Grenzen aus, so erkennt man, daß auch eine hohle Kugelschale von endlicher Dicke auf einen in ihrem Inneren gelegenen Punkt keine Anziehung ausübt.

Wenn es sich daher um die Bestimmung der Anziehung einer Vollkugel auf einen Punkt im Innern derselben handelt, so legt man durch den gegebenen Punkt eine konzentrische Kugelfläche, welche die gegebene Kugel in zwei Teile teilt. Für die äußere Kugelschale ist dann der gegebene Punkt ein innerer, für die innere Vollkugel dagegen ein äußerer, resp. ein Punkt auf ihrer Oberfläche.

Die Gesamtanziehung wird demnach

$$A=\tfrac{4}{3}\gamma m'\pi a.$$

2) Man berechne die Anziehung, die ein homogener Kreiszylinder vom Radius R und der Höhe $2h$ auf einen materiellen Punkt ausübt, welcher auf der Zylinderachse liegt.



Lös.: Wählt man die Zylinderachse zur Z-Achse und die in der halben Zylinderhöhe zur Basis parallel gelegte Ebene zur XY-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so kann es sich in dieser Aufgabe aus leicht einzusehenden Gründen nur um die Z-Komponente der Anziehung handeln. Ist a die Entfernung des gegebenen Punktes P von der XY-Ebene, r diejenige eines Massenelementes dm des Zylinders vom Punkte P, λ der Winkel, den die von P nach dm gezogene Gerade mit der Z-Achse einschließt, so wird das Attraktionselement, wenn man zylindrische Koordinaten ϱ, φ, z einführt und der Einfachheit wegen die Masse des gegebenen Punktes und ebenso die Dichtigkeit des Zylinders $=1$ setzt:

$$dA = \frac{\varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz}{r^2} \cos\lambda.$$

1. Fall. Liegt der gegebene Punkt außerhalb des Zylinders, ist also $a > h$, so wird, da

$$\cos\lambda = \frac{a-z}{r}, \quad r = \sqrt{(a-z)^2 + \varrho^2},$$

$$A = \int_{z=-h}^{z=+h} \int_{\varrho=0}^{\varrho=R} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{(a-z)\,\varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz}{[(a-z)^2 + \varrho^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\pi \int_{z=-h}^{z=+h} \int_{\varrho=0}^{\varrho=R} \frac{(a-z)\,\varrho\, d\varrho\, dz}{[(a-z)^2 + \varrho^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\pi \int_{-h}^{+h} \left[\frac{-(a-z)}{\sqrt{(a-z)^2 + R^2}} + 1\right] dz =$$

$$= 2\pi \left[\sqrt{(a-h)^2 + R^2} - \sqrt{(a+h)^2 + R^2} + 2h\right].$$

2. Fall. Wenn der gegebene Punkt innerhalb des Zylinders liegt, also $a < h$ ist, so teilt man den Zylinder vermittels einer durch den Punkt P gehenden, der Basis parallelen Ebene in zwei Teile und führt die Rechnung für beide Teile besonders durch, indem man beachtet, daß für den einen Teil

$$\cos\lambda = \frac{a-z}{r}, \quad r = \sqrt{(a-z)^2 + \varrho^2}$$

und für den andern

$$\cos\lambda = \frac{z-a}{r}, \quad r = \sqrt{(z-a)^2 + \varrho^2}.$$

Die Differenz der so erhaltenen Resultate liefert dann die verlangte Anziehung. Es wird hiernach

$$A = \int_{z=-h}^{z=a} \int_{\varrho=0}^{\varrho=R} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{(a-z)\,\varrho\, d\varrho\, dz\, d\varphi}{[(a-z)^2+\varrho^2]^{\frac{3}{2}}} -$$

$$- \int_{z=a}^{z=+h} \int_{\varrho=0}^{\varrho=R} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{(z-a)\,\varrho\, d\varrho\, dz\, d\varphi}{[(z-a)^2+\varrho^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\pi \left[\sqrt{(h-a)^2+R^2} - \sqrt{(a+h)^2+R^2} + 2a \right].$$

Anm. Man zeige, daß das letztere Resultat aus demjenigen für den ersten Fall einfach durch die Vertauschung der Größen a und h abgeleitet werden kann.

3) Es soll das Potential des in der vorhergehenden Aufgabe genannten Zylinders in bezug auf einen Punkt P seiner Achse bestimmt werden.

Lös.: Unter dem Potential eines Körpers in Beziehung auf einen gegebenen Punkt P versteht man eine Funktion $F(x, y, z)$ der Koordinaten x, y, z dieses Punktes, deren mit entgegengesetztem Zeichen genommene partielle Ableitungen

$$-\frac{\partial F}{\partial x}, \; -\frac{\partial F}{\partial y}, \; -\frac{\partial F}{\partial z}$$

die Komponenten der Kraft liefern, mit welcher sich der Körper und der Punkt gegenseitig anziehen.

Wird die Masse des gegebenen Punktes $= 1$ und die Dichtigkeit des Körpers $= \gamma$ gesetzt und ist ferner $r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ die Entfernung des Punktes P von einem beliebigen Elemente $\gamma\, da\, db\, dc$ des Körpers, so kann das Potential des Körpers in bezug auf den Punkt P ausgedrückt werden durch das über den ganzen Körper zu erstreckende dreifache Integral

$$\iiint \frac{\gamma\, da\, db\, dc}{r}.$$

Wenn alle Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe bestehen bleiben, so ergibt sich für das gesuchte Potential in dem Falle $a > h$, in welchem also der Punkt außerhalb des Zylinders liegt:

$$\int_{\varrho=0}^{\varrho=R}\int_{z=-h}^{z=+h}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz}{\sqrt{(a-z)^2+\varrho^2}}=$$

$$=\pi\Big[(a+h)\sqrt{R^2+(a+h)^2}-(a-h)\sqrt{R^2+(a-h)^2}-$$

$$-4ah+R^2\,l\,\frac{a+h+\sqrt{R^2+(a+h)^2}}{a-h+\sqrt{R^2+(a-h)^2}}\Big]=$$

$$=\pi\Big[a\left(\sqrt{R^2+(a+h)^2}-\sqrt{R^2+(a-h)^2}\right)+h\left(\sqrt{R^2+(a+h)^2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{R^2+(a-h)^2}\right)-4ah+R^2\,l\,\frac{a+h+\sqrt{R^2+(a+h)^2}}{a-h+\sqrt{R^2+(a-h)^2}}\Big].$$

und im Falle $a<h$, d. h. wenn der gegebene Punkt sich im Innern des Zylinders befindet:

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\varrho=0}^{\varrho=R}\int_{z=-h}^{z=a}\frac{\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz}{\sqrt{\varrho^2+(a-z)^2}}+$$

$$+\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\varrho=0}^{\varrho=R}\int_{z=a}^{z=+h}\frac{\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz}{\sqrt{\varrho^2+(z-a)^2}}=$$

$$=\pi\Big[(a+h)\sqrt{R^2+(a+h)^2}+(h-a)\sqrt{R^2+(h-a)^2}+$$

$$+R^2\,l\,\frac{(a+h+\sqrt{R^2+(a+h)^2})(h-a+\sqrt{R^2+(h-a)^2})}{R^2}-$$

$$-2(a^2+h^2)\Big].$$

Kapitel II.

Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 7. Trennung der Variabeln.

Einleitung. Wenn die linke Seite einer auf die Form

$$Mdx + Ndy = 0$$

gebrachten Differentialgleichung, wo M und N beliebige Funktionen von x und y bezeichnen, das vollständige Differential einer Funktion u ist, in welchem Falle der Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ genügt wird, so ist

$$u = \int^x Mdx + \int^y \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int^x Mdx\right] dy + \text{Const.}$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung.

Differentialgleichungen von der Form

$$X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0,$$

wo X_1 und X_2 Funktionen der einen Veränderlichen x, Y_1 und Y_2 Funktionen der einen Veränderlichen y bedeuten, werden mittels der Trennung der Variablen integriert. Aus der gegebenen Differentialgleichung folgt:

$$X_1 Y_1 dx = - X_2 Y_2 dy, \quad \frac{X_1}{X_2} dx = - \frac{Y_2}{Y_1} dy,$$

und es ist daher $\int \frac{X_1}{X_2} dx = - \int \frac{Y_2}{Y_1} dy + \text{Const.}$ das allgemeine Integral derselben.

Beispiele.

1) Als Beispiele zur Integration von Differentialgleichungen

$$du = Mdx + Ndy = 0,$$

deren erste Glieder vollständige Differentiale sind, können die in Abt. 1, Kap. V genannten Aufgaben dienen, indem man die dort zur Integration vorgelegten zwei- und dreigliedrigen Differentialausdrücke gleich Null setzt.

2) Trennung der Variablen.

1) $xdy - ydx = 0$; Lös.: $y = Cx$.

2) $2x^2dy = ydx$; Lös.: $y = e^{c - \frac{1}{2x}}$.

3) $x^2dy + (y - a)\,dx = 0$; Lös.: $y = a + Ce^{\frac{1}{x}}$.

4) $xy\,dx = (a + x)(b + y)\,dy$; Lös.: $x - y + C = l\,[y^b (a + x)^a]$

5) $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

Lös.: Setzt man $y = \sqrt{xz}$, so folgt $dx + xdz = 0$, und hieraus $\frac{y^2}{x} + lx = C$.

6) $(y^2 + xy^2)\,dx + (x^2 - yx^2)\,dy = 0$;

Lös.: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + l\,\frac{y}{x} = C$.

7) $x\,dy - y\,dx = dy\sqrt{1 + x^2} + dx\sqrt{1 + y^2}$;

Lös.: $x^2 - y^2 + y\sqrt{1 + y^2} + x\sqrt{1 + x^2} +$
$+ l\,[(y + \sqrt{1 + y^2})\,(x + \sqrt{1 + x^2})] = C$.

8) $x\sqrt{1 + y^2}\,dx + y\sqrt{1 + x^2}\,dy = 0$;

Lös.: $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$.

9) $(1 + y^2)\,dx - (y + \sqrt{1 + y^2})\,(\sqrt{1 + x^2})^3\,dy = 0$;

Lös.: $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = l\,(1 + y^2 + y\sqrt{1 + y^2}) + C$.

10) Aufg. Man bestimme sämtliche Kurven, welche in jedem ihrer Punkte eine Subtangente von gegebener Länge a besitzen.

$a = 2$

Lös.: Da $S_t = y\frac{dx}{dy}$, so führt die vorgelegte Aufgabe auf die Differentialgleichung $y\frac{dx}{dy} = a$, deren allgemeine Lösung $y = e^{\frac{x-x_0}{a}}$ ist. Es genügt somit nur die logarithmische Linie der gestellten Bedingung.

11) Aufg. Es sollen die Kurven gefunden werden, für welche in jedem Punkte die Subtangente gleich der n-fachen Abszisse ist.

$n = -1$ $n = \frac{1}{2}$

Lös.: Die verlangten Kurven genügen der Differentialgleichung $y\frac{dx}{dy} = nx$; sie sind daher sämtlich enthalten in der Gleichung $y^n = Cx$.

$n = \frac{3}{2}$ $n = 2$

Welche Kurven ergeben sich hieraus für $n = 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1$, usw.?

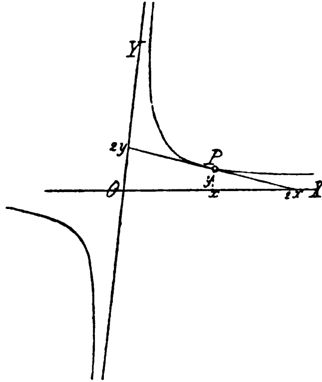
12) Aufg. Welche Kurven ergeben in jedem ihrer Punkte eine Polarsubtangente von der konstanten Länge a?

Lös.: Da $S_t = \frac{r^2 d\varphi}{dr}$, so wird $r^2 \frac{d\varphi}{dr} = a$ und somit $r(\varphi_0 - \varphi) = a$.

Es besitzt daher nur die hyperbolische Spirale die in der Aufgabe genannte Eigenschaft.

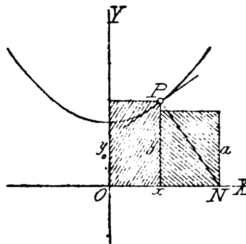
13) Aufg. Man bestimme eine Kurve von der Beschaffenheit, daß das zwischen den Koordinatenachsen enthaltene Stück jeder ihrer Tangenten im Berührungspunkte halbiert wird.

Lös.: Bezeichnet man bei Annahme eines schiefwinkligen Koordinatensystems die laufenden Koordinaten der Tangente mit ξ, η und die Koordinaten des Berührungspunktes mit x, y, so lautet die Gleichung der Tangente $\frac{\xi}{2x} + \frac{\eta}{2y} = 1$.



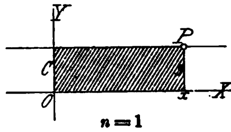
Da auch bei schiefwinkligen Koordinaten der Winkelkoeffizient der Tangente gleich $\frac{dy}{dx}$ ist, so hat man die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, deren allgemeine Lösung $xy = C$ ist. Die gesuchte Kurve ist demnach eine auf ihre Asymptoten bezogene Hyperbel.

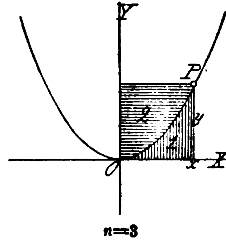
14) Aufg. Es soll eine Kurve gefunden werden, für welche das aus den rechtwinkligen Koordinaten x, y eines jeden ihrer Punkte gebildete Rechteck gleich ist dem durch die Subnormale und eine Linie von konstanter Länge a bestimmten Rechteck.

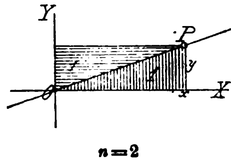


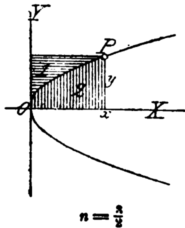
Lös.: Da $S_n = y \frac{dy}{dx}$ ist, so hat man für die gesuchte Kurve die Differentialgleichung $a y \frac{dy}{dx} = xy$. Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet: $x^2 = 2a(y - y_0)$; es ist somit die verlangte Kurve eine Parabel.

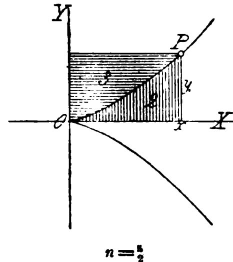
15) Aufg. Man bestimme sämtliche Kurven, deren von $x = 0$ bis $x = x$ gerechnete Flächeninhalte dem Rechteck xy proportional sind.











Lös.: Die in der Aufgabe gestellte Bedingung liefert die Gleichung 1) $n\int_0^x y\,dx = xy$, aus welcher durch Differentiation folgt: 2) $(n-1)\,y\,dx = x\,dy$. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist 3) $y = Cx^{n-1}$. Da diese Gleichung für jeden Wert von C der Gleichung 1) genügt, so kann jede der gefundenen Kurven noch einer weiteren Bedingung unterworfen werden.

Welche speziellen Kurven gehen aus der Gleichung 3) für $n = 1,\ 2,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}$ usw. hervor?

16) Aufg. Bei welcher Kurve verhalten sich die von demselben Leitstrahl ($\varphi = 0$) an gezählten Polarsektoren, wie die Unterschiede der Quadrate der die Sektoren begrenzenden Leitstrahlen?

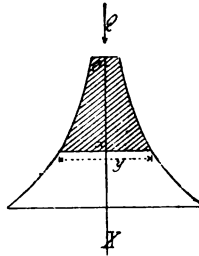
Lös.: Wird der $\varphi = 0$ entsprechende Leitstrahl mit r_0 bezeichnet, so muß für die gesuchte Kurve 1) $\frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2\,d\varphi =$

$= n(r^2 - r_0^2)$ sein. Hieraus ergibt sich die Differentialgleichung 2) $\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{4n}$, deren allgemeines Integral

3) $r = Ce^{\frac{\varphi}{4n}}$ ist.

Die für r gefundene Funktion genügt der Gleichung 2), welchen Wert man auch der Konstanten C beilegt. Damit aber auch die Gleichung 1) erfüllt sei, muß $n(r^2 - C^2) = n(r^2 - r_0^2)$, d. h. $C = r_0$ sein. Die verlangte Kurve ist somit die logarithmische Spirale $r = r_0 e^{\frac{\varphi}{4n}}$ (cf. Bd. I, p. 216).

17) Aufg. Wie muß eine Säule konstruiert werden, die an allen Stellen dem konstanten Drucke Q den gleichen Widerstand entgegensetzen soll?

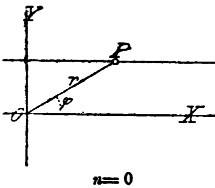


Lös.: Ein im Abstande x vom oberen Ende der Säule befindlicher Querschnitt, dessen Flächeninhalt mit y bezeichnet werden möge, hat außer der Last Q noch das über ihm lastende Eigengewicht des Körpers zu tragen. Ist nun γ das Gewicht der Volumeneinheit des Materials, R der konstante Widerstand, den die Flächeneinheit darbietet, so ist

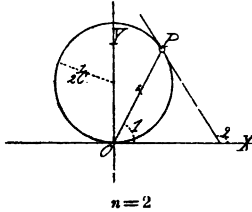
$$1)\quad Ry = Q + \gamma \int_0^x y\,dx.$$

Hieraus folgt durch Differentiation 2) $R\,dy = \gamma y\,dx$. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist 3) $R\,l\,y = \gamma(x - x_0)$, und es lautet daher die Gleichung, die zwischen x und y bestehen muß: $y = e^{\frac{\gamma(x - x_0)}{R}}$. Hierbei ist die Konstante $x_0 = \frac{R}{\gamma}\, l\, \frac{R}{Q}$ aus der Gleichung 1) zu bestimmen.

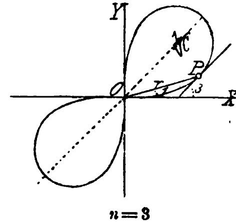
18) **Aufg.** Ein Punkt bewegt sich in einer Ebene so, daß der Winkel α, den die Tangente in irgend einem Punkte seiner Bahn mit der X-Achse einschließt, n mal so groß ist, als der Winkel φ, den der nach diesem Punkte geführte Leitstrahl mit der X-Achse bildet. Welche Bahn beschreibt der Punkt?



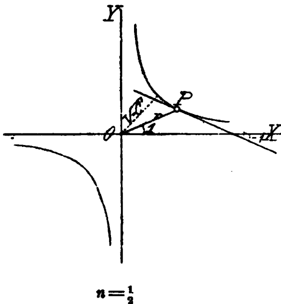
$n = 0$



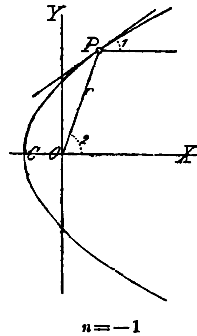
$n = 2$



$n = 3$



$n = \frac{1}{2}$



$n = -1$

Lös.: Werden Polarkoordinaten angewendet und bezeichnet ϑ den Winkel, den die Tangente mit dem Leitstrahl bildet, so ist $\alpha = \varphi + \vartheta$. Nach der in der Aufgabe ausgesprochenen Bedingung soll nun $\alpha = n\varphi$ sein; demnach wird $\vartheta = (n-1)\varphi$ und $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{r d\varphi}{dr} = \operatorname{tang}(n-1)\varphi$. Hieraus folgt

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{\operatorname{tang}(n-1)\varphi}, \quad l(cr) = \frac{1}{n-1} l \sin(n-1)\varphi,$$

oder, indem $c^n = C$ gesetzt wird, $Cr^{n-1} = \sin(n-1)\varphi$.

Welche Kurven werden durch diese Gleichung dargestellt, wenn $n = 0, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ angenommen wird?

Für $n = 1$ verliert das gefundene Resultat seine Bedeutung. In diesem Falle ergibt sich unmittelbar als allgemeine Lösung die Gleichung $\varphi = \alpha$, welcher ein Büschel

von Geraden entspricht, die sich im Koordinatenanfangspunkt schneiden.

§ 8. Homogene Differentialgleichungen.

Einleitung. Eine Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ heißt homogen, wenn M und N homogene Funktionen desselben Grades von x und y sind. (Vgl. Bd. I, § 15.) Die Substitution $y = xz$, $dy = xdz + zdx$ in eine solche Differentialgleichung ermöglicht die Trennung der Variablen x und z.

Das allgemeine Integral einer homogenen Differentialgleichung wird geometrisch repräsentiert durch eine Schar von ähnlichen und ähnlich gelegenen Kurven, für welche der Koordinatenanfangspunkt der Ähnlichkeitspunkt ist.

Eine Differentialgleichung von der Form

$$(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0,$$

wo a, b, c und a', b', c' Konstanten bedeuten, kann, wenn $ab' - a'b \lesseqgtr 0$ ist, durch Verlegung des Koordinatenanfangspunktes in den Schnittpunkt der Geraden $M = ax + by + c = 0$, $N = a'x + b'y + c' = 0$ in eine homogene Differentialgleichung übergeführt werden. Ist dagegen $ab' - a'b = 0$, d. h. sind die Geraden $M = 0$ und $N = 0$ parallel, so wird die Differentialgleichung durch Einführung der neuen Variablen $u = ax + by + c$, $v = bx - ay + c''$ (wo c'' auch gleich Null sein kann) in eine solche verwandelt, in welcher sich die Variablen u und v trennen lassen.

Beispiele.

1) $(x + y)\,dx + x\,dy = 0.$

Lös.: Setzt man $y = xz$, $dy = x\,dz + zdx$, so folgt $(x + xz)\,dx + x\,(xdz + zdx) = 0$ und hieraus $\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{1 + 2z}$, $lx + \frac{1}{2}l\,(1 + 2z) = c.$

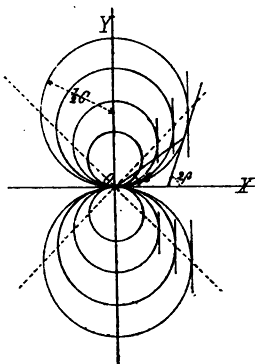
Führt man für z wieder seinen Wert $z = \frac{y}{x}$ ein und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird, indem man noch $e^c = \sqrt{C}$ setzt, $x^2 + 2xy = C.$

2) $(8y + 10x)\,dx + (5y + 7x)\,dy = 0;$

Lös.: $(y + x)^2\,(y + 2x)^3 = C.$

3) $(x^2 - y^2)\, dy - 2xy\, dx = 0$; Lös.: $x^2 + y^2 = Cy$.

Bei Einführung von Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ gelangt man zu der Differentialgleichung $\frac{dr}{r} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = 0$, deren allgemeines Integral $r = c \sin \varphi$ ist.



Die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung wird demnach geometrisch durch eine Kreisschar repräsentiert. Sämtliche Kreise der Schar haben den Nullpunkt und in diesem die X-Achse als Tangente gemein; ihre Mittelpunkte liegen auf der Y-Achse im Abstand $\frac{1}{2}C$ vom Nullpunkt, und ihre Radien sind $= \frac{1}{2}C$. Für $C = \infty$ wird der Radius unendlich groß, und der Kreis geht in die X-Achse über.

Aus der gegebenen Differentialgleichung folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; hieraus ergibt sich, daß die Tangenten in denjenigen Kreispunkten, welche auf den Koordinatenachsen $x = 0$ und $y = 0$ liegen, der X-Achse und in denjenigen Punkten, welche die Kreise mit den Geraden $y = \pm x$ gemein haben, der Y-Achse parallel sind.

Anm. Wenn man $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \beta$ setzt, so wird $\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx} =$

$$= \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{2 \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{tang}^2 \beta} = \operatorname{tang} 2\beta.$$ Welche geometrische Eigenschaft des Kreises liegt hierin ausgesprochen?

4) $xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 + y^2}$;

Lös.: $y = cx^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ oder $2y = cx^2 - \frac{1}{c}$.

5) $(x - \sqrt{xy} - y)\, dx + \sqrt{xy}\, dy = 0$.

Lös.: Setzt man $\frac{y}{x} = t^2$, so wird $\frac{dx}{x} + \frac{2t^2\,dt}{1 - t - t^2 + t^3} = 0$

und daher

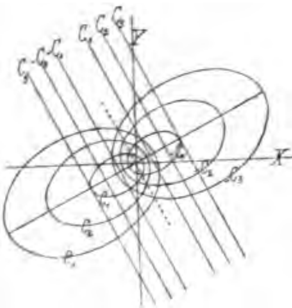
$$x = C \cdot \frac{e^{-\frac{1}{1-t}}}{(1-t)\sqrt{1-t^2}}, \quad y = C \cdot \frac{t^2 e^{-\frac{1}{1-t}}}{(1-t)\sqrt{1-t^2}},$$

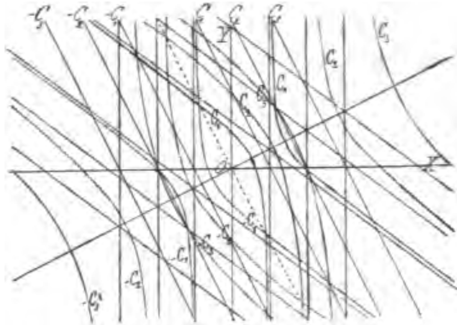
oder indem man t eliminiert:

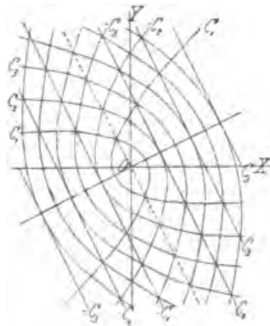
$$\frac{e^{-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})\sqrt{x-y}} = c.$$

6) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right) dx + x\cos\frac{y}{x}\, dy = 0$; Lös.: $x = Ce^{-\sin\frac{y}{x}}$.

7) $[a\sqrt{x^2 + y^2} - cx]\, dx + [b\sqrt{x^2 + y^2} - cy]\, dy = 0$.







Lös.: Die Einführung von $\frac{y}{x} = z$ ergibt

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(b\sqrt{1+z^2} - cz)\,dz}{(a+bz)\sqrt{1+z^2} - c(1+z^2)} =$$

$$= -\frac{b - \frac{cz}{\sqrt{1+z^2}}}{(a+bz) - c\sqrt{1+z^2}}\,dz.$$

Hieraus folgt als allgemeines Integral

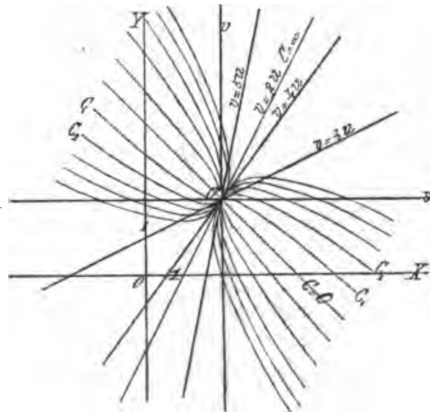
$$lx = -l(a + bz - c\sqrt{1+z^2}) + C_1 \quad \text{oder}$$

$$ax + by = c\sqrt{x^2+y^2} + C.$$

Kürzer gelangt man zu demselben Resultate mittels der Substitution $x^2 + y^2 = r^2$, wodurch die gegebene Differentialgleichung übergeht in folgende: $adx + bdy = cdr$, deren allgemeines Integral $ax + by = cr + C$ ist.

Die letztere Gleichung stellt eine Schar von ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten dar, für welche der Koordinatenanfangspunkt der Brennpunkt und die Gerade $ax + by - C = 0$ die zugehörige Direktrix ist. Die Kegelschnitte sind Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln, je nachdem $c^2 \gtreqless a^2 + b^2$ ist.

8) $2(x - 2y + 1)\,dx + (5x - y - 4)\,dy = 0.$



Lös.: Verlegt man den Koordinatenanfangspunkt in den Schnittpunkt $\alpha = 1$, $\beta = 1$ der Geraden $x - 2y + 1 = 0$ und

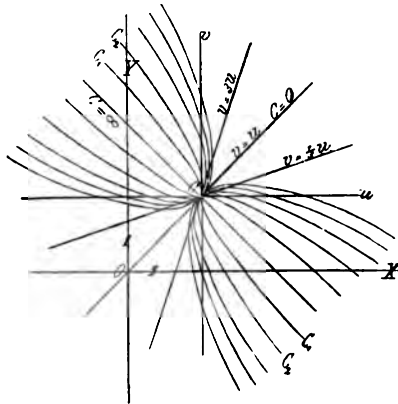
$5x - y - 4 = 0$ und setzt zu diesem Zwecke $x = 1 + u$, $y = 1 + v$, so folgt $2(u - 2v)\,du + (5u - v)\,dv = 0$.

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist $(u + v)^2 = C(2u - v)$ und daher das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung $(x + y - 2)^2 = C(2x - y - 1)$.

Die geometrische Interpretation der Gleichung $(u + v)^2 = C(2u - v)$ ergibt eine Schar von Parabeln, welche den (neuen) Koordinatenanfangspunkt und in demselben die Gerade $v = 2u$ als Tangente gemeinsam haben und deren Durchmesser der Geraden $v = -u$ parallel sind. Aus der Differentialgleichung $2(u - 2v)\,du + (5u - v)\,dv = 0$ oder $\frac{dv}{du} = -\frac{2(u - 2v)}{5u - v}$ erkennt man, daß die Tangenten in denjenigen Punkten der Parabeln, welche auf der Geraden $v = \frac{1}{2}u$ liegen, der U-Achse und in den Punkten, welche auf der Geraden $v = 5u$ liegen, der V-Achse parallel sind. Ebenso würde man beispielsweise finden, daß die Tangenten in denjenigen Punkten, für welche $\frac{dv}{du} = 1$, d. h. in den Punkten, welche auf der Geraden $v = \frac{7}{5}u$ liegen, einen Winkel von 45^0 mit der U-Achse bilden. Die genannte Gerade schneidet somit sämtliche Parabeln, außer im Nullpunkte, in den Scheiteln derselben.

9) $(3y - 7x + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0$;
Lös.: $(y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = C$.

10) $(x - 3y + 2)\,dx + (3x - y - 2)\,dy = 0$.



Lös.: Führt man den Schnittpunkt $\alpha = 1$, $\beta = 1$ der Geraden $x - 3y + 2 = 0$ und $3x - y - 2 = 0$ als neuen Koordinatenanfangspunkt ein und setzt demgemäß $x = u + 1$, $y = v + 1$, so erhält man die Differentialgleichung $(u - 3v)\,du + (3u - v)\,dv = 0$ und deren allgemeines Integral $v - u = C\,(u + v)^2$.

Man diskutiere die letztere Gleichung in ähnlicher Weise, wie es unter 26) geschehen.

Kehrt man wieder zum ursprünglichen Koordinatensystem zurück, so lautet die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung: $C\,(y + x - 2)^2 = y - x$.

11) $(ax + by + c)\,dx + [k\,(ax + by + c) + c']\,dy = 0$.

Lös.: Da in diesem Falle die Geraden $M = 0$ und $N = 0$ parallel sind, so wähle man $u = ax + by + c$ und $v = bx - ay$ als neue Variable, wodurch man zu der Differentialgleichung

$$[(a + bk)\,u + bc']\,du + [(b - ak)\,u - ac']\,dv = 0$$

gelangt. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist

$$v = \frac{a + bk}{ak - b}\,u - c'\,\frac{a^2 + b^2}{(b - ak)^2}\,l\,[(ak - b)\,u + ac'] + C.$$

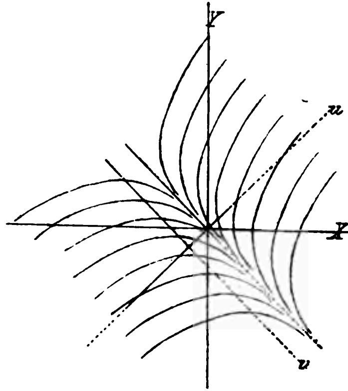
Drückt man u und v wieder durch x und y aus, so folgt

$$bx - ay = \frac{a + bk}{ak - b}\,(ax + by + c) - c'\,\frac{a^2 + b^2}{(b - ak)^2}\,l\,[(ak - b)\,(ax + by + c) + ac'] + C.$$

In dem speziellen Falle $a = b = c = 1$, $k = -1$, $c' = 2$ ergibt sich beispielsweise $(u - 1)\,C' = e^{-v}$ oder $(x + y)\,C' = e^{-(x-y)}$. Transformiert man noch auf die Geraden $y = \pm x$ als neue Koordinatenachsen mit Hilfe der Formeln

$$x = (\xi + \eta)\,\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = -(\xi - \eta)\,\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ so kommt}$$

$$\eta = e^{-(\xi + C)\sqrt{2}}.$$



Die durch die letztere Gleichung dargestellte Kurvenschar kann leicht konstruiert werden.

12) $(x - 2y + 9)\,dx - (3x - 6y + 19)\,dy = 0;$

Lös.: $3y - x = 8l\,(x - 2y + 1) + C.$

13) $x^m\,(ay\,dx + bx\,dy) + y^n\,(a'y\,dx + b'x\,dy) = 0.$

Lös.: Setzt man $x^m = u$, $y^n = v$, woraus $m\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$, $n\frac{dy}{y} = \frac{dv}{v}$, so verwandelt sich die gegebene Differentialgleichung in die folgende

$$(au + a'v)\frac{du}{mu} + (bu + b'v)\frac{dv}{nv} = 0,$$

als deren allgemeine Lösung man findet

$$lu + \frac{m}{\alpha\beta}\left[b\beta\,l\frac{v}{u} - (b\beta - b'\alpha)\,l\frac{\beta v + \alpha u}{\beta u}\right] = c,$$

wo α für $na + mb$, β für $na' + mb'$ steht. Ersetzt man u, v, α, β wieder durch ihre Werte, so kann das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung auf die Form gebracht werden

$$a'\,(na + mb)\,lx + b\,(na' + mb')\,ly +$$
$$+ (ab' - a'b)\,l\,[(na' + mb')\,y^n + (na + mb)\,x^m] = C.$$

14) $x^3\,(2y\,dx - 3x\,dy) + y^4\,(-3y\,dx + 2x\,dy) = 0.$

Lös.: Durch Anwendung der in der vorhergehenden Auf-

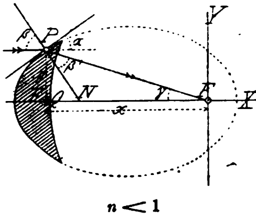
gabe angegebenen Substitution ergibt sich die allgemeine Lösung

$$lx + 6ly - \tfrac{4}{3}l\,(y^4 + \tfrac{1}{6}x^3) = C.$$

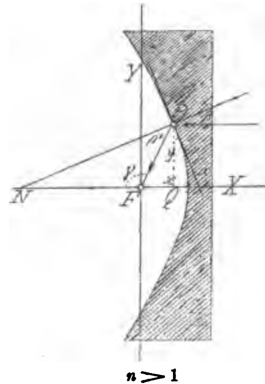
15) Man bestimme diejenige Kurve, deren von $x = 0$ bis $x = x$ gerechneter Flächeninhalt gegeben wird durch den Ausdruck $\frac{y^3}{x}$.

Lös.: Die in der Aufgabe ausgesprochene Eigenschaft der Kurve liefert unmittelbar die Gleichung 1) $\int_0^x y\,dx = \frac{y^3}{x}$, woraus durch Differentiation 2) $(x^2 + y^2)\,dx - 3xy\,dy = 0$. Das allgemeine Integral der Gleichung 2) ist 3) $x^2 - 2y^2 = Cx^{\frac{2}{3}}$ oder $y = \sqrt{\frac{x^2 - Cx^{\frac{2}{3}}}{2}}$. Da der für y gefundene Ausdruck für jeden beliebigen Wert von C der Gleichung 1) genügt, so kann die gefundene Kurve noch einer weiteren Bedingung unterworfen werden.

16) Aus einem durchsichtigen, das Licht einfach brechenden Körper soll ein Rotationskörper geschliffen werden, welcher Lichtstrahlen, die in der Richtung seiner Achse auffallen, nach einem Punkte bricht. Welche Form muß der Meridian dieses Körpers haben?



$n < 1$



$n > 1$

Lös.: Wird der Einfallswinkel eines beliebigen, im Punkte P der gesuchten Kurve eintreffenden Lichtstrahles mit β, der Ausfallswinkel mit β' bezeichnet, so ist nach einem be-

kannten Gesetze der Physik $\frac{\sin \beta'}{\sin \beta} = n = \text{Const.}$ Wählt man die Rotationsachse des Körpers zur X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt der Vereinigungspunkt F der Lichtstrahlen sein möge und sind x, y die Koordinaten des Punktes P, so findet man

$$\sin \beta = \frac{dx}{ds},$$

$$\sin \beta' = -\frac{x + y\frac{dy}{dx}}{\frac{ds}{dx}\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{und daher}$$

$$\frac{\sin \beta'}{\sin \beta} = n = -\frac{x + y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{oder} \quad n\sqrt{x^2+y^2} + x + y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Als allgemeines Integral dieser Differentialgleichung ergibt sich

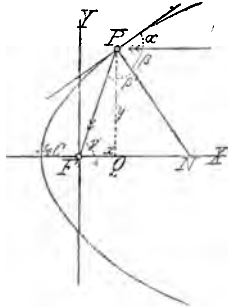
$$\sqrt{x^2+y^2} + nx = C$$

oder bei Anwendung von Polarkoordinaten $r = \frac{C_1}{1 + n\cos\varphi}$.

Der Meridian des verlangten Rotationskörpers ist demnach ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse, wenn $n < 1$, d. h. wenn das Licht von einem dünneren in ein dichteres Medium übergeht, eine Hyperbel (der eine Zweig derselben), wenn $n > 1$, d. h. wenn das Licht von einem dichteren in ein dünneres Medium eintritt und eine Parabel, wenn $n = 1$. Der letztere Fall liefert insofern keine Lösung der gestellten Aufgabe, als für $\beta' = \beta$ der Körper das Licht nicht bricht, sondern einfach durchläßt. Für die genannten Kegelschnitte ist der Koordinatenanfangspunkt ein Brennpunkt.

17) Welche Form muß der Meridian einer Rotationsfläche haben, welche, als Brennspiegel aufgefaßt, parallel zur Achse auffallende Lichtstrahlen in einen Punkt F der Achse zurückwirft?

Lös.: Wählt man die Achse der Rotationsfläche zur X-Achse und den Punkt F zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so findet man, daß die gesuchte Kurve der Differentialgleichung



$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{x}{y}\,\frac{dy}{dx} - 1 = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

genügen muß. Als allgemeines Integral derselben ergibt sich

$$\sqrt{x^2+y^2} \pm x = C \text{ oder } y^2 = 2C\left(x + \tfrac{1}{2}C\right).$$

Diese Gleichung repräsentiert eine Schar von Parabeln, welche den Nullpunkt zum gemeinsamen Brennpunkt haben. (Konfokale Parabeln.)

§ 9. Lineare Differentialgleichungen.

Einleitung. Eine Differentialgleichung heißt linear, wenn in ihr die Funktion y und ihre Ableitungen y', y'' usw. nur in der ersten Potenz vorkommen. Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung kann stets auf die Form

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

gebracht werden, wo P und Q Funktionen von x oder Konstante bedeuten. Ist in einer solchen Differentialgleichung das zweite Glied $Q = 0$, so ergibt sich unmittelbar als deren allgemeines Integral $y = Ce^{-\int P dx}$, wo C eine willkürliche Konstante bezeichnet. Wenn dagegen Q von Null verschieden ist, so gelangt man durch eine der drei folgenden Methoden zum allgemeinen Integral.

α) Methode der Variation der Konstanten. (Von Lagrange.) Wird in dem allgemeinen Integral $y = Ce^{-\int P dx}$ der

Differentialgleichung ohne zweites Glied die Größe C nicht mehr als konstant, sondern als eine Funktion von x angesehen, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = -PCe^{-\int Pdx} + e^{-\int Pdx} \cdot \frac{dC}{dx} \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = e^{-\int Pdx} \cdot \frac{dC}{dx}.$$

Macht man nun $e^{-\int Pdx} \cdot \frac{dC}{dx} = Q$, woraus $C = \int Qe^{+\int Pdx} \cdot dx + C_1$, so erkennt man, daß

$$y = e^{-\int Pdx} \left[\int Qe^{+\int Pdx} \cdot dx + C_1\right]$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung mit zweitem Gliede ist.

β) Methode von Bernoulli. Das allgemeine Integral wird in der Form $y = uv$ vorausgesetzt, wonach die Differentialgleichung ergibt

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q.$$

Über die Variable v kann man so verfügen, daß $\frac{dv}{dx} + Pv = 0$ wird; nachdem v aus dieser Differentialgleichung bestimmt ist, findet sich u aus der Differentialgleichung $v\frac{du}{dx} = Q$.

γ) Methode des integrierenden Faktors. Multipliziert man die gegebene Differentialgleichung mit vdx, so kann v als Funktion von x so bestimmt werden, daß die linke Seite der Gleichung $vdy + Pyvdx = Qvdx$, deren rechte Seite ein vollständiges Differential ist, ebenfalls ein vollständiges Differential wird. Die Funktion v heißt dann ein integrierender Faktor der vorgelegten Differentialgleichung. Zur Bestimmung desselben liefert die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial}{\partial y}(Pyv) = \frac{\partial}{\partial x}(v)$ oder $vP = \frac{dv}{dx}$, woraus sich $v = e^{\int Pdx}$ ergibt. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$e^{\int Pdx}(dy + Pydx) = e^{\int Pdx} Qdx$$

wird hierauf auf bekannte Weise erhalten. (Vgl. 1).)

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

erscheint stets unter der Form

$$y = e^{-\int P dx} \int Q e^{\int P dx} \cdot dx + C e^{-\int P dx} = y_1 + C y_2,$$

wo y_2 das Integral der Differentialgleichung ohne zweites Glied bezeichnet. Hieraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der das allgemeine Integral repräsentierenden Kurvenschar. Denkt man sich nämlich die Kurven $y = y_1$ und $y = y_2$ konstruiert und sind y_1 und y_2 die der Abszisse x entsprechenden Ordinaten dieser Kurven, so findet man die zu derselben Abszisse gehörige Ordinate der Kurve $y = y_1 + C y_2$, indem man zur Ordinate y_1 das C-fache der Ordinate y_2 hinzufügt. Jeder spezielle Wert von C liefert eine spezielle Kurve der Schar. Aus dieser Entstehungsweise der Kurvenschar folgt leicht die weitere Eigenschaft, daß die Tangenten an sämtliche Kurven der Schar sich in einem und demselben Punkte schneiden, sofern ihre Berührungspunkte in einer Parallelen zur Y-Achse liegen.

Die nachfolgenden Aufgaben mögen zur Übung nach jeder der drei soeben angegebenen Methoden und, wo es sich tun läßt, auch dadurch gelöst werden, daß man ein partikuläres Integral der Differentialgleichung mit zweitem Gliede zu erraten sucht und zu demselben das allgemeine Integral der entsprechenden Differentialgleichung ohne zweites Glied hinzufügt.

Beispiele.

1) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Lös.: 1) Methode von Bernoulli. Substituiert man $y = uv$, so geht die gegebene Differentialgleichung über in

$$v\left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1}\right) + u\frac{dv}{dx} = (x+1)^3.$$

Über die Funktionen u und v kann nun so verfügt werden, daß

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0 \text{ und } u\frac{dv}{dx} = (x+1)^3$$

wird. Das Integral der ersteren dieser Differentialgleichungen

ist $\frac{1}{2} lu = l(x+1)$ oder $u = (x+1)^2$. Setzt man diesen Wert für u in die zweite Differentialgleichung ein, so erhält man $(x+1)^2 \frac{dv}{dx} = (x+1)^3$ oder $dv = (x+1)\,dx$ und hieraus $v = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$. Demnach wird schließlich

$$y = uv = (x+1)^2 [\tfrac{1}{2}(x+1)^2 + C].$$

2) Variation der Konstanten. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung ohne zweites Glied $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0$ lautet: $\frac{1}{2} ly = lC(x+1)$ oder $y = C(x+1)^2$.

Betrachtet man in dieser Gleichung die Größe C als Funktion von x, so ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = 2C(x+1) + \frac{dC}{dx}(x+1)^2.$$

Wenn man die für y und $\frac{dy}{dx}$ gefundenen Werte in die gegebene Differentialgleichung einsetzt

$$2C(x+1) + \frac{dC}{dx}(x+1)^2 - \frac{2C(x+1)^2}{x+1} = (x+1)^3,$$

so erkennt man, daß derselben nur dann Genüge geleistet wird, wenn $\frac{dC}{dx}(x+1)^2 = (x+1)^3$ oder $\frac{dC}{dx} = x+1$. Demnach muß $C = \int (x+1)\,dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C_1$ sein. Hiernach wird

$$y = (x+1)^2 [\tfrac{1}{2}(x+1)^2 + C_1].$$

3) Anwendung eines integrierenden Faktors. Multipliziert man die gegebene Differentialgleichung mit vdx

$$vdy - \frac{2yv}{x+1}\,dx = v(x+1)^3\,dx,$$

so läßt sich v als Funktion von x so bestimmen, daß die linke Seite dieser Differentialgleichung ein vollständiges Differential wird. Zur Berechnung der Funktion v ergibt die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial}{\partial x}(v) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2yv}{x+1}\right)$ die Differentialgleichung $\frac{dv}{dx} = -\frac{2v}{x+1}$ oder $\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x+1}$. Dem-

nach wird $lv = -2l(x+1)$ und $v = \frac{1}{(x+1)^2}$. Setzt man diesen Wert in die obige Gleichung ein und wendet zur Integration der linken Seite entweder die in Teil II, Abt. 1, Kap. V angegebene Formel oder die Methode der teilweisen Integration an, so folgt

$$\frac{y}{(x+1)^2} = \tfrac{1}{2}(x+1)^2 + C$$

und hieraus, wie oben

$$y = (x+1)^2 [\tfrac{1}{2}(x+1)^2 + C].$$

4) Durch Erraten. Da die gegebene Differentialgleichung die Variable x explicite nur in der Verbindung $(x+1)$ enthält, so kann man versuchen, ob in dem Ausdruck $y = A(x+1)^m$ sich die Konstanten A und m so bestimmen lassen, daß derselbe der Differentialgleichung genügt. Aus $y = A(x+1)^m$ ergibt sich $\frac{dy}{dx} = mA(x+1)^{m-1}$. Setzt man diese Werte in die vorgelegte Differentialgleichung ein, so geht diese über in

$$mA(x+1)^{m-1} - 2\frac{A(x+1)^m}{x+1} = (x+1)^3.$$

Hieraus erkennt man, daß dieselbe befriedigt wird, wenn man hat $mA - 2A = 1$ und $m - 1 = 3$. Hieraus folgt $m = 4$, $A = \frac{1}{2}$. Es ist somit $y = \frac{1}{2}(x+1)^4$ ein partikuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung. Fügt man zu demselben noch das allgemeine Integral $y = C(x+1)^2$ der Differentialgleichung ohne zweites Glied hinzu, so findet sich als allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung

$$y = (x+1)^2 [\tfrac{1}{2}(x+1)^2 + C].$$

2) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = a\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$;

Lös.: $y = (x+\sqrt{1+x^2})(a \arcsin x + C)$.

3) $\frac{dy}{dx} + \frac{ay}{1+x^2} = \frac{b}{1+x^2}$; Lös.: $y = \frac{b}{a} + Ce^{-a \operatorname{arctang} x}$.

4) $\frac{dy}{dx} - ay \cos x = b \sin 2x;$

Lös.: $y = Ce^{a \sin x} - \frac{2b}{a}\left(\sin x + \frac{1}{a}\right).$

5) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2;$ Lös.: $x(y - x) = C.$

6) $\frac{dy}{dx} = xy + ax + by + ab;$ Lös.: $y = Ce^{\frac{1}{2}(x+b)^2} - a.$

Da $\frac{dy}{dx} = (x + b)(y + a)$ ist, so können die Variablen getrennt werden.

7) $\frac{dy}{dx} + my = n;$ Lös.: $y = \frac{n}{m} + Ce^{-mx}.$

8) $\frac{dy}{dx} + ay = b_0 + b_1 x + b_2 x^2;$

Lös.: $y = \frac{a^2 b_0 - ab_1 + 2b_2}{a^3} + \frac{ab_1 - 2b_2}{a^2} x +$

$+ \frac{b_2}{a} x^2 + Ce^{-ax}.$

9) $\frac{dy}{dx} + ay = be^{mx};$ Lös.: $y = \frac{b}{m + a} e^{mx} + Ce^{-ax}.$

10) $\frac{dy}{dx} + ay = b \sin mx;$

Lös.: $y = -\frac{bm}{a^2 + m^2} \cos mx + \frac{ab}{a^2 + m^2} \sin mx + Ce^{-ax}.$

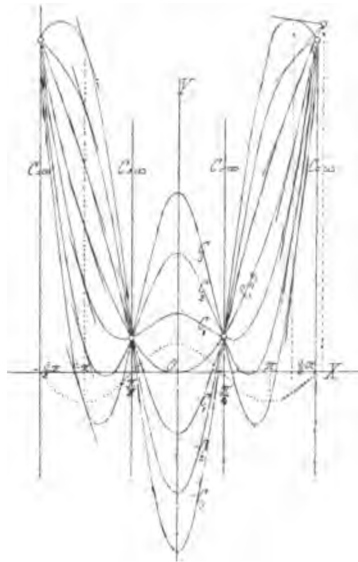
11) $\frac{dy}{dx} - ay = x^4;$

Lös.: $y = Ce^{ax} - \left(\frac{x^4}{a} + \frac{4x^3}{a^2} + 12\frac{x^2}{a^3} + 24\frac{x}{a^4} + \frac{24}{a^5}\right).$

12) $\frac{dy}{dx} \cos x + y \sin x = x \cos x + \frac{1}{2}x^2 \sin x;$

Lös.: $y = \frac{1}{2}x^2 + C \cos x.$

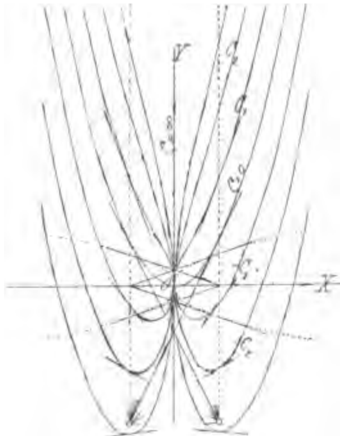
Man diskutiere die allgemeine Lösung und konstruiere einzelne Repräsentanten der dieselbe geometrisch darstellenden Kurvenschar.



13) $\operatorname{tang} x \cdot \frac{dy}{dx} - y = \frac{1}{4}x\,(2 \operatorname{tang} x - x)$;

Lös.: $y = \frac{1}{4}x^2 + C \sin x$.

14) $2x\frac{dy}{dx} - y = \frac{3}{2}x^2$; Lös.: $y = \frac{1}{2}x^2 + C\sqrt{x}$.



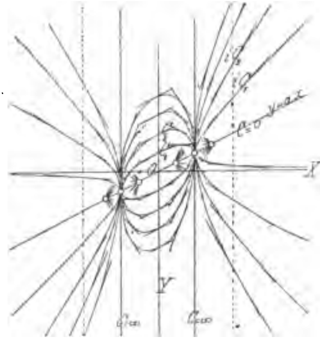
Setzt man $y = y_1 + Cy_2$, $y_1 = \frac{1}{2}x^2$, $y_2 = \sqrt{x}$, so kann man

die Kurven, auf welche das allgemeine Integral führt, mittels zweier Parabeln leicht konstruieren.

15) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\operatorname{arctang} x$.

Lös.: $y = Ce^{-\operatorname{arctang} x} + \operatorname{arctang} x - 1$.

16) $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=a$; Lös.: $y = ax + C\sqrt{1-x^2}$.



Die Kurven der Schar, welche die allgemeine Lösung repräsentiert, sind für reelle Werte der Konstanten C Ellipsen und für imaginäre Werte von C Hyperbeln. Unter den Kurven befinden sich die Geraden $y = ax$, $x = \pm 1$. Die Gerade $y = ax$ ist ein allen Kurven gemeinsamer Durchmesser; die Gerade $x = +1$ wird im Punkte $(1, a)$ und die Gerade $x = -1$ im Punkte $(-1, -a)$ von sämtlichen Kurven der Schar berührt. Wenn man die gegebene Differentialgleichung in der Form

$$Mdx + Ndy = 0$$

schreibt, so haben die beiden ausgezeichneten Punkte $(1, a)$, $(-1, -a)$ die Eigenschaft, daß für dieselben sowohl $M = 0$, als auch $N = 0$ wird.

17) $y^p\frac{dy}{dx} + Py^{p+1} = Qy^q$. (Gleichung von Bernoulli).

Hierin bedeuten P und Q gegebene Funktionen von x, und p und q beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene, konstante Zahlen mit Einschluß der Null.

Lös.: Nimmt man mit der gegebenen Differentialgleichung der Reihe nach folgende Umformungen vor: $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, wo

$$n = q - p,$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^n} + \frac{P}{y^{n-1}} = Q,$$

$$-\frac{1}{n-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right) + \frac{P}{y^{n-1}} = Q,$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right) + (n-1)\frac{P}{y^{n-1}} = (n-1)\,Q$$

und setzt nun $-\frac{1}{y^{n-1}}$ gleich z, so gelangt man zu der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - (n-1)\,Pz = (n-1)\,Q,$$

welche in bezug auf z linear ist.

18) Aufg. Nach der in der vorhergehenden Nummer angegebenen Vorschrift löse man die Gleichungen:

α) $\frac{dy}{dx} + a \sin x \cdot y = by^2 \sin x$; Lös.: $y = \frac{a e^{a \cos x}}{b e^{a \cos x} - a C}$.

β) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -\frac{(x+1)^3}{2} y^3$;

Lös.: $\frac{1}{y^2} = (x+1)^2 \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 + C\right]$.

γ) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = ay^2 lx$; Lös.: $\frac{1}{y} = x\left[C - \frac{1}{2}a\,(lx)^2\right]$.

19) Aufg. Es sollen alle Kurven von der Eigenschaft bestimmt werden, daß sich in jedem ihrer Punkte der Subtangente zur Ordinate verhält, wie eine Linie von gegebener Länge a zu der um die Abszisse verminderten Ordinate.

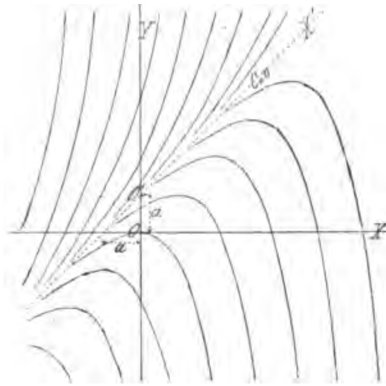
Lös.: Für die gesuchten Kurven soll die Proportion

$$y\frac{dx}{dy} : y = a : y - x$$

bestehen, aus welcher die Differentialgleichung

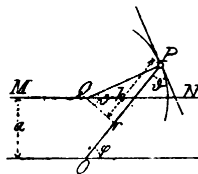
$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{a} y = -\frac{1}{a} x$$

folgt, deren allgemeines Integral lautet: $y = x + a\,Ce^{\frac{x}{a}}$.



Transformiert man noch zu schiefwinkligen Achsen, indem man die Y-Achse beibehält und die Gerade $y - x - a = 0$ zur X-Achse wählt, so erhält man als Gleichung der gesuchten Kurvenschar $Y = Ce^{\frac{x}{a\sqrt{2}}}$.

20) Aufg. Man bestimme alle ebenen Kurven von der Eigenschaft, daß in jedem Punkte derselben die Projektion der Normale auf den Leitstrahl die konstante Länge k hat. Die Normale werde hierbei vom Kurvenpunkte P bis zum Durchschnitt mit einer gegebenen Geraden MN und der Leitstrahl von einem festen Punkte O bis zum Kurvenpunkte gezählt. (*Nouvelles Annales de Math. de Gerono et J. Bourget.* Bd. XIII, 2me Série, pag. 483).



Lös.: Wählt man die durch O gehende Parallele zur gegebenen Geraden MN als Achse eines Polarkoordinatensystems, ist ferner PQ die Normale in dem angegebenen Sinne, a die Entfernung des Poles von der gegebenen Geraden und ϑ der Winkel, den die Tangente an die gesuchte Kurve im Punkte P mit dem Leitstrahl einschließt, so besteht die Relation 1) $PQ \sin \vartheta = k$.

Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes P mit r und φ, so wird

$$PQ = \frac{r \sin\varphi - a}{\cos(\varphi + \vartheta)} = \frac{r \sin\varphi - a}{\cos\varphi \frac{dr}{ds} - \sin\varphi\, r \frac{d\varphi}{ds}}, \quad \sin\vartheta = \frac{r d\varphi}{ds}$$

und die Gleichung 1) geht über in

$$\frac{r \sin\varphi - a}{\cos\varphi \frac{dr}{ds} - \sin\varphi\, r \frac{d\varphi}{ds}} \cdot \frac{r d\varphi}{ds} = k \text{ oder}$$

$$2) \quad \frac{dr}{d\varphi} - \frac{k \sin\varphi - a}{k \cos\varphi} \cdot r = r^2 \cdot \frac{\sin\varphi}{k \cos\varphi}.$$

Diese Differentialgleichung ist in bezug auf die Funktion r von der unter 17) behandelten Form. Dividiert man durch r^2 und setzt $\frac{1}{r} = z$, so verwandelt sie sich in die lineare Differentialgleichung

$$3) \quad \frac{dz}{d\varphi} + \frac{k \sin\varphi - a}{k \cos\varphi} z = - \frac{\sin\varphi}{k \cos\varphi}.$$

Wenn man zur Integration der Gleichung 3) die Bernoullische Methode anwendet und demgemäß $z = uv$ setzt, so ergeben sich zur Bestimmung von u und v die Differentialgleichungen

$$\frac{dv}{v} = - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi + \frac{a}{k} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \quad du = - \frac{1}{v} \frac{\sin\varphi}{k \cos\varphi} d\varphi.$$

Das Integral der ersteren dieser Gleichungen ist

$$lv = l \cos\varphi + \frac{a}{k} l \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right).$$

Demnach wird $v = \left[\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right)\right]^{\frac{a}{k}} \cdot \cos\varphi$,

$$du = - \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{k \cos^2\varphi \left[\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right)\right]^{\frac{a}{k}}} \text{ und}$$

$$u = - \frac{1}{k} \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi \left[\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right)\right]^{\frac{a}{k}}}.$$

Die Ausführung dieser letzteren Quadratur wird wesentlich erleichtert durch die Substitutionen

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi)=t,\ \cos\varphi=\frac{2t}{1+t^2},\ -\sin\varphi\, d\varphi=2\,\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt,$$

wodurch man erhält

$$u=\frac{1}{2k}\int\left[t^{-\left(\frac{a}{k}+2\right)}-t^{-\frac{a}{k}}\right]dt=\tfrac{1}{2}\left[C-\frac{t^{-\left(\frac{a}{k}+1\right)}}{a+k}+\frac{t^{-\frac{a}{k}+1}}{a-k}\right].$$

Da nun

$$v=\frac{2t^{\frac{a}{k}+1}}{1+t^2},\ z=uv=\frac{1}{r}=\frac{1}{1+t^2}\left[Ct^{\frac{a}{k}+1}-\frac{1}{a+k}+\frac{t^2}{a-k}\right],$$

so ergibt sich schließlich, indem man wieder zu den ursprünglichen Koordinaten zurückkehrt, für die gesuchte Kurvenschar die Gleichung

$$\frac{1}{r}=\frac{k+a\sin\varphi}{a^2-k^2}+C\left[\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi)\right]^{\frac{a}{k}+1}\cos^2(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Spezialfälle. 1) $C=0$ ergibt $r=\frac{a^2-k^2}{k+a\sin\varphi}$. Die Kurve ist somit eine Ellipse, wenn $a<k$, eine Hyperbel, wenn $a>k$ ist.

2) $a\lesseqgtr 0$, $k=0$, $C=0$ liefert $r=\frac{a}{\sin\varphi}$ oder $r\sin\varphi=a$. Es ist dies die Gleichung der gegebenen Geraden MN. In diesem Falle ist die Normale gleich Null.

3) $C=0$, $a=0$, $k\lesseqgtr 0$ ergibt $r=-k$; es ist dies der Kreis vom Radius k.

4) Der Fall $k=a$, in welchem die gefundene Gleichung ihre Gültigkeit verliert, erfordert eine besondere Behandlung. Geht man auf die Differentialgleichungen für u und v zurück, so findet sich

$$v=2\,\frac{t^2}{1+t^2},\ u=\frac{1}{2k}\int(t^{-3}-t^{-1})\,dt=\frac{1}{2k}\left[-\tfrac{1}{2}t^{-2}-lt+C\right]$$

und daher

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{k(1+t^2)}\left[Ct^2-\tfrac{1}{2}-t^2 lt\right]=$$

$$=\frac{1}{k}\left\{\left[C-l\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi)\right]\sin^2(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi)-\tfrac{1}{2}\cos^2(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi)\right.$$

Dieser Gleichung entspricht eine transzendente Kurve.

§ 10. Trajektorien.

Einleitung. Eine Kurve, welche sämtliche Kurven einer gegebenen Kurvenschar unter demselben Winkel schneidet, heißt eine isogonale Trajektorie der letzteren.

Denkt man sich $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha$ aus der Differentialgleichung der gegebenen Kurvenschar bestimmt (als Funktion von x, y) so daß etwa $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$ und ist β der Winkel, den die Trajektorien mit den Kurven der gegebenen Schar bilden sollen, so lautet die Differentialgleichung der gesuchten Trajektorienschar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x, y) + \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{tang} \beta \cdot \varphi(x, y)}.$$

Für $\beta = 90^0$ ergibt sich als Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\varphi(x, y)}$.

Die Differentialgleichung einer Kurvenschar, welche durch die Gleichung $f(x, y; a) = 0$ gegeben ist, wird erhalten durch Elimination des variablen Parameters a aus den Gleichungen

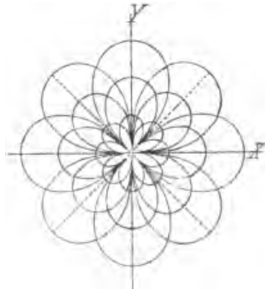
$$f(x, y; a) = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

Beispiele.

1) Aufg. Man bestimme die orthogonalen Trajektorien der Lemniskatenschar

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2),$$

wo a einen variablen Parameter bezeichnet.



Lös.: Die Differentialgleichung der gegebenen Kurvenschar lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{3y^2 - x^2}{3x^2 - y^2}.$$

Hiernach ergibt sich für die Trajektorienschar die homogene Differentialgleichung:

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \cdot \frac{3y^2 - x^2}{3x^2 - y^2},$$

deren allgemeines Integral $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$ ist.

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung der gegebenen Kurvenschar: $r^2 = a \cos 2\varphi$ und die Gleichung der Trajektorien: $r^2 = C_1 \sin 2\varphi$. Hieraus erkennt man, daß die gesuchten Kurven wieder Lemniskaten sind, deren Achsen jedoch um 45^0 gegen die Achsen der gegebenen Lemniskaten gedreht erscheinen.

2) Aufg. Es soll eine Kurvenschar bestimmt werden, welche sämtliche Kurven der Schar $y = ax^n$ so schneidet, daß in jedem Durchschnittspunkt einer gegebenen Kurve mit einer Trajektorie die Tangenten an diese Kurven symmetrisch zu der betreffenden Ordinate liegen.

Lös.: Differentialgleichung der gegebenen Kurvenschar:

$$\frac{dy}{dx} = n\,\frac{y}{x};$$

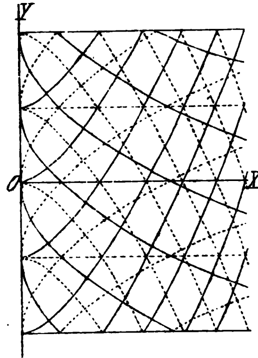
Differentialgleichung der Trajektorien: $\frac{dy}{dx} = -n\,\frac{y}{x}$.

Gleichung der Trajektorienschar: $x^n y = C$.

Für $n = 1$ ist die gegebene Kurvenschar das Strahlenbüschel $y = ax$, und die Trajektorien sind die gleichseitigen Hyperbeln $xy = C$.

3) Aufg. Man bestimme die orthogonalen Trajektorien einer Schar von kongruenten Parabeln, welche in ihren Scheiteln eine gegebene Gerade berühren.

Lös.: Wird die gegebene Gerade zur Y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt und bezeichnet a einen variablen Parameter, so lautet die Gleichung der gegebenen Kurvenschar $(y - a)^2 = 2px$, die entsprechende Differentialgleichung $p\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 2x$, die Differentialgleichung der Trajektorien



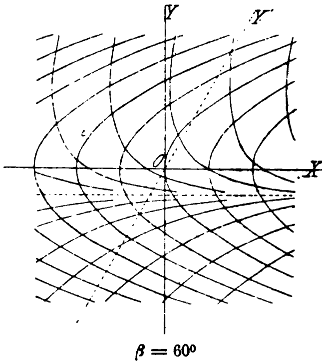
$p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2x$ oder $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2x}{p}}$ und das allgemeine Integral dieser letzteren $(y - C)^2 = \frac{8}{9p}x^3$.

Die verlangten Trajektorien sind somit Neilsche Parabeln.

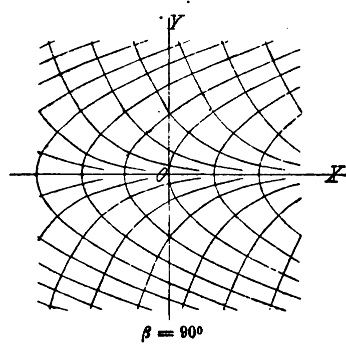
4) Aufg. Es sollen die Kurven gefunden werden, welche die Parabelschar

$$y^2 = 2p(x - a),$$

wo a einen variablen Parameter bezeichnet, unter dem Winkel β schneiden.



$\beta = 60^0$



$\beta = 90^0$

Lös.: Differentialgleichung der gegebenen Kurvenschar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

Differentialgleichung der Trajektorien:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{p}{y} - \operatorname{tang}\beta}{1 - \frac{p}{y}\operatorname{tang}\beta} = \frac{p - y\operatorname{tang}\beta}{y - p\operatorname{tang}\beta}.$$

Integral der letzteren Gleichung:

$$x + C = \operatorname{cotang}\beta \cdot y - \frac{p}{\sin^2\beta}\, l\,(y\operatorname{tang}\beta - p).$$

Wählt man noch mit Beibehaltung der X-Achse die **Gerade** $x = \operatorname{cotang}\beta \cdot y$ zur Y-Achse eines schiefwinkligen **Koordinaten**systems und setzt zu diesem Zwecke $x = \xi + \eta\cos\beta$, $y = \eta\sin\beta$, so ergibt sich für die verlangten Kurven die Gleichung

$$\eta = \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} \cdot e^{-\frac{\sin^2\beta}{p}(\xi - C)} - p\,\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}.$$

Diese Kurven können unter Zuhilfenahme der auf **rechtwinklige** Koordinaten bezogenen logarithmischen Linie $y = e^x$ leicht **konstruiert** werden.

Für $\beta = 90^0$ tritt an die Stelle der Differential**gleichung** $\frac{dy}{dx} = \frac{p - y\operatorname{tang}\beta}{y - p\operatorname{tang}\beta}$ die folgende: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{p}$, aus welcher sich $y = e^{-\frac{1}{p}(x - C)}$ als Gleichung der orthogonalen Trajektorien **der** gegebenen Kurvenschar ergibt.

5 **Aufg.** Es sollen die beiden Kurvenscharen **bestimmt werden, welche die Parabelschar**

$$x^2 = 2a\,(y - x\sqrt{3})$$

unter dem **Winkel** $\beta = \pm 60^0$ schneiden.



Lös.: 1) $\beta = +60^0$. Differentialgleichung der gegebenen Kurvenschar: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x\sqrt{3}}{x}$, Differentialgleichung der Trajektorien: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y\sqrt{3}}$, allgemeines Integral der letzteren homogenen Differentialgleichung: $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$.

Diese Gleichung läßt erkennen, daß die verlangten Trajektorien eine Parabelschar bilden, welche durch Spiegelung der gegebenen Kurvenschar in bezug auf die Geraden $y = \pm x$ entstanden gedacht werden kann. Die Achsen dieser Parabeln sind der X-Achse parallel; die Gerade $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ist eine sämtlichen Parabeln im Koordinatenanfangspunkte gemeinsame Tangente. Der geometrische Ort der Scheitel der Parabeln ist die Gerade $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,x$.

2) $\beta = -60^0$. Differentialgleichung der Trajektorien:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x\sqrt{3}}{y\sqrt{3} - x},$$

Integral derselben: $\sqrt{3}\,(x^2 + y^2) - 2xy = C$.

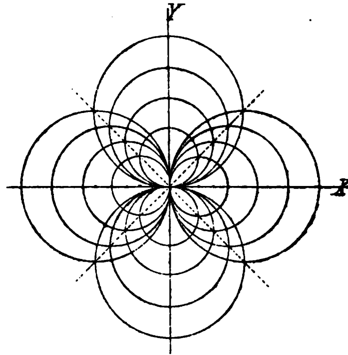
In diesem Falle bestehen demnach die Trajektorien aus einer Schar von ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist. Die Achsen der Ellipsen verhalten sich zueinander, wie $(\sqrt{3} + 1) : \sqrt{2}$ und sind um 45^0 gegen die Koordinatenachsen gedreht. In allen Ellipsenpunkten, welche auf der Geraden $y = x\sqrt{3}$ liegen, sind die Tangenten der X-Achse und in allen denjenigen, welche auf der Geraden $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,x$ liegen, der Y-Achse parallel.

6) Aufg. Man bestimme die orthogonalen Trajektorien der Kreisschar

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

Lös.: Differentialgleichung der gegebenen Kreisschar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

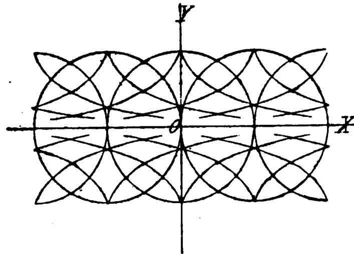


Differentialgleichung der Trajektorien:

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser letzteren homogenen Differentialgleichung lautet: $x^2 + y^2 - Cx = 0$.

7) Aufg. Der Mittelpunkt eines Kreises vom konstanten Radius r bewegt sich auf der X-Achse fort. Man bestimme die orthogonalen Trajektorien der auf diese Weise entstehenden Kreisschar.



Lös.: Bezeichnet man mit a die Abszisse des beweglichen Kreismittelpunktes, so lautet die Gleichung der gegebenen Kreisschar:

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

Hieraus ergibt sich als Differentialgleichung dieser Kreisschar $\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = r^2$ und sonach als Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien $\left(y\frac{dx}{dy}\right)^2 + y^2 = r^2$ oder $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$.

Das allgemeine Integral der letzteren Differentialgleichung ist

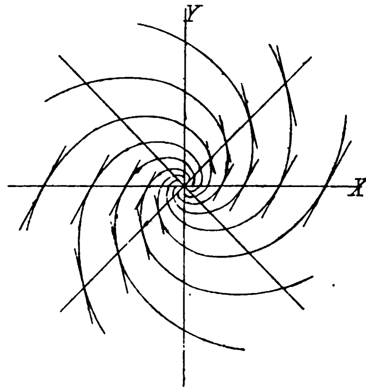
$$\pm x = \sqrt{r^2 - y^2} + rl \frac{y}{r + \sqrt{r^2 - y^2}} + C,$$

und es sind daher die gesuchten Trajektorien kongruente Huygenssche Traktorien, welche sämtlich aus einer einzigen derselben durch Verschiebung in der Richtung der X-Achse entstehen. (Vgl. Bd. I, S. 211.)

8) Aufg. Es sollen die Kurven gefunden werden, welche die Kurvenschar

$$y = ax^n,$$

wobei a einen variablen Parameter und n eine gegebene konstante Zahl bedeutet, unter dem konstanten Winkel β schneiden.



$n = 1,\ \beta = 60^0$

Lös.: Die Differentialgleichung der gegebenen Kurvenschar lautet: $\frac{dy}{dx} = n\frac{y}{x}$. Wird $\operatorname{tang}\beta = m$ gesetzt, so findet man für die Trajektorien die homogene Differentialgleichung

$$(mx + ny)\,dx = (x - mny)\,dy.$$

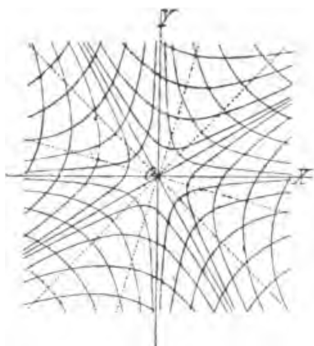
Spezialfälle. 1) Für $n = 1$ ist die gegebene Kurvenschar ein Strahlenbüschel. Die Differentialgleichung der Trajektorien wird

$$(mx + y)\,dx + (my - x)\,dy = 0,$$

das allgemeine Integral derselben

$$l\sqrt{x^2 - y^2} = \frac{1}{m}\operatorname{arctang}\frac{y}{x} + C.$$

Es sind somit die Trajektorien logarithmische Spiralen, wie man beim Übergang zu Polarkoordinaten sofort erkennt. Wird in der letztern Gleichung $m = \infty$ gesetzt, so folgt $x^2 + y^2 = C'$; daher sind die orthogonalen Trajektorien des gegebenen Strahlenbüschels, wie vorauszusehen war, konzentrische Kreise.



$n = -1, \ \beta = 60^\circ$.

2) $n = -1$. Die vorgelegten Kurven sind gleichseitige, auf ihre Asymptoten bezogene Hyperbeln. Differentialgleichung der Trajektorien:

$$(mx - y)\, dx - (my + x)\, dy = 0,$$

Integral derselben:

$$m(x^2 - y^2) - 2xy = C.$$

Die verlangten Trajektorien sind hiernach wieder gleichseitige Hyperbeln.

3) Für den Fall der orthogonalen Trajektorien, $m = \infty$, ergibt sich die Differentialgleichung $ny\,dy = -x\,dx$, als deren Integral man unmittelbar findet $x^2 + ny^2 = C$.

Die orthogonalen Trajektorien sind daher ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem n positiv oder negativ ist.

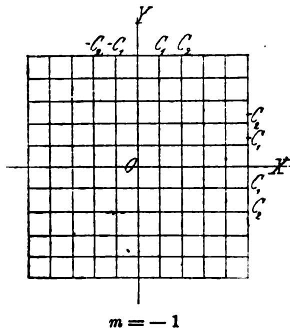
9) Aufg. Man bestimme die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar

$$r^m = C \sin m\varphi.$$

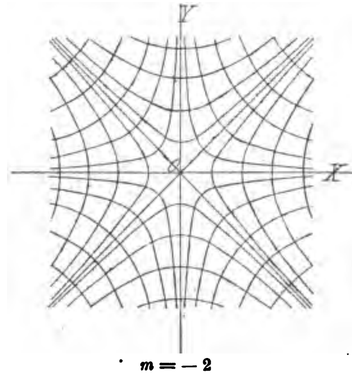
Lös.: Differentialgleichung der gegebenen Kurven:

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{cotang} m\varphi \cdot d\varphi,$$

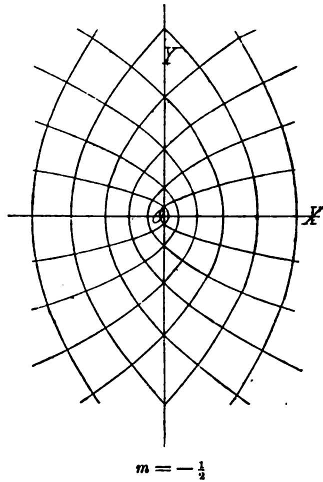
Differentialgleichung der Trajektorien: $\frac{dr}{r} = -\operatorname{tang} m\varphi \cdot d\varphi$,
Integral der letzteren Differentialgleichung: $r^m = C \cos m\varphi$.
Hieraus ersieht man, daß die Trajektorien durch eine Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2m}$ übergehen in die gegebenen Kurven. Welche Kurven werden durch die gegebene Gleichung dargestellt, wenn man m die Werte -1, $+1$, $+2$, -2, $-\frac{1}{2}$ usw. beilegt?



$m = -1$



$m = -2$



$m = -\frac{1}{2}$

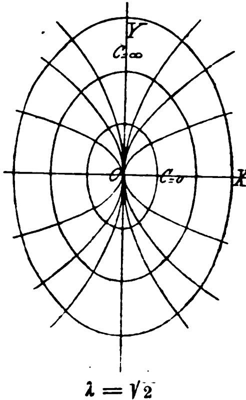
Figur zum Fall $m = +1$ ist identisch mit der Figur zu Aufgabe 61, pag. 202.

Figur zum Fall $m = +2$ ist identisch mit der Figur zu Aufgabe 56, pag. 199.

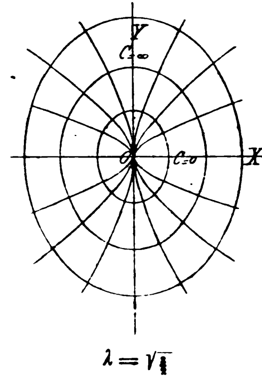
10) Aufg. Es sollen die orthogonalen Trajektorien der Schar von ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen

$$y^2 = \lambda^2 (a^2 - x^2),$$

wo a einen variablen Parameter bezeichnet, gefunden werden.



$\lambda = \sqrt{2}$



$\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

Lös.: Differentialgleichung der gegebenen Kurven:

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda^2 \frac{x}{y},$$

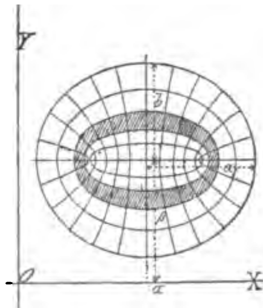
Differentialgleichung der Trajektorien:

$$\frac{dx}{dy} = \lambda^2 \frac{x}{y},$$

Integral der letzteren Gleichung: $y^{\lambda^2} = Cx$.

Welche Kurven ergeben sich hieraus für $\lambda = \sqrt{2}$, $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, 1 usw.?

11) Aufg. Man bestimme die orthogonalen Trajektorien der Schar von konfokalen Kegelschnitten



$$\frac{x^2}{a+1} + \frac{y^2}{a} = 1,$$

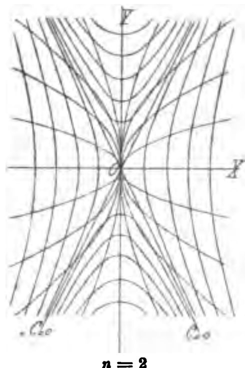
wo a einen variablen Parameter bedeutet.

Lös.: Die Differentialgleichung der gegebenen Kurvenschar lautet: $\left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = 1$. Für die Trajektorien findet man genau dieselbe Differentialgleichung, woraus hervorgeht, daß die gesuchten Trajektorien mit den gegebenen Kurven identisch sind, so jedoch, daß zu den konfokalen Ellipsen konfokale Hyperbeln als Trajektorien gehören und umgekehrt.

12) Aufg. Man sucht für die Parabelschar

$$y^2 = 2px,$$

wo p einen variablen Parameter bezeichnet, die Trajektorien von der Eigenschaft, daß in jedem Schnittpunkte einer Trajektorie mit einer Kurve der gegebenen Schar die Subnormale der ersteren das $n$fache der Subtangente der letzteren sei.

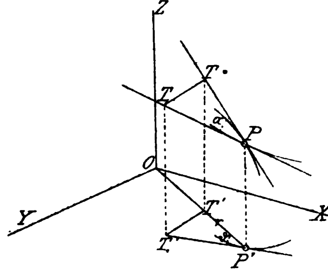


$n = 2$

Lös.: Die verlangten Trajektorien genügen der Differentialgleichung $2nx = y\frac{dy}{dx}$, deren allgemeines Integral $\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{2nC} = 1$ ist. Sie bestehen daher, welche reellen Werte man auch der Konstanten C beilegen möge, aus einer Schar von ähnlichen und ähnlich gelegenen Hyperbeln.

13) Aufg. Es soll die Horizontalprojektion (auf die XY-Ebene) derjenigen Kurven bestimmt werden, welche sämtliche Meridiane einer gegebenen Rotationsoberfläche unter dem gegebenen Winkel α schneiden. (*Nouvelles Annales de Math.*, Bd. XIII, 2[me] Série.)

Lös.: Wird die Rotationsachse der gegebenen Oberfläche zur Z-Achse gewählt, so erscheint die Gleichung der gegebenen Fläche unter der Form $z = f(r)$, wo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Sei P ein Punkt eines Meridians, PT die Tangente an den Meridian, PT_1 diejenige an die Trajektorie. Wird von T_1 noch ein Lot T_1T auf PT gefällt, so entsteht ein Dreieck PTT_1, dessen Projektion auf die XY-Ebene $P'T'T_1'$ sei. PT projiziert sich im Radius vector OP', PT_1 in der Tangente $P'T_1'$ der gesuchten Kurve. Somit ist $\operatorname{tang} T'P'T_1' = \operatorname{tang} \vartheta = \frac{r d\varphi}{dr}$; andererseits ist auch $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{T'T_1'}{P'T'}$, $\operatorname{tang} \alpha = \frac{TT_1}{PT} = \frac{T'T_1'}{PT}$ und daher $\operatorname{tang} \vartheta = \operatorname{tang} \alpha \cdot \frac{PT}{P'T'}$. Infolge der Gleichung $z = f(r)$ wird nun $PT = P'T' \sqrt{1 + [f'(r)]^2}$, mithin

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{r d\varphi}{dr} = \operatorname{tang} \alpha \sqrt{1 + [f'(r)]^2} \text{ oder}$$

$$d\varphi = \operatorname{tang} \alpha \cdot \frac{\sqrt{1 + [f'(r)]^2}}{r} dr.$$

Spezialfälle. 1) Für $\alpha = 90^0$ wird $r \frac{d\varphi}{dr} = \infty$ oder $\frac{dr}{r d\varphi} = 0$, $r = \text{Const.}$ Die Trajektorien sind daher Parallelkreise.

2) $\alpha = 0^0$ ergibt $d\varphi = 0$, $\varphi = \text{Const.}$ In diesem Falle findet man selbstverständlich die Meridiane der gegebenen Fläche wieder.

3) Wenn der Meridian eine Gerade, die gegebene Fläche also ein Rotationskegel ist, so wird $f'(r) = \text{Const.} = a$ und daher

$$d\varphi = \text{tang}\,\alpha \cdot \sqrt{1+a^2}\,\frac{dr}{r},\quad \varphi = \text{tang}\,\alpha\,\sqrt{1+a^2}\,l\,\frac{r}{C} = k\,l\,\frac{r}{C},$$

wo k für $\text{tang}\,\alpha\,\sqrt{1+a^2}$ steht, $r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$. Die Horizontalprojektion der Trajektorien besteht sonach aus einer Schar von logarithmischen Spiralen. (Vgl. Bd. I, pag. 216.)

4) Ist die gegebene Fläche die Kugel vom Radius R:

$$z = \sqrt{R^2 - r^2},\ \text{so wird}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = R\,\text{tang}\,\alpha\,\frac{1}{r\sqrt{R^2-r^2}},\quad \varphi = -\,\text{tang}\,\alpha\,l\,\frac{R+\sqrt{R^2-r^2}}{rC},$$

$$r = 2R\,\frac{Ce^{\varphi\,\text{cotang}\,\alpha}}{1+C^2e^{2\varphi\,\text{cotang}\,\alpha}}.$$

(Vgl. Teil II, Abt. 1, pag. 172.)

§ 11. Singuläre Lösungen.

Einleitung. Wenn man in dem allgemeinen Integrale $f(x, y;\, C) = 0$ einer gegebenen Differentialgleichung erster Ordnung der willkürlichen Konstanten C einen bestimmten Wert beilegt, so geht dasselbe über in ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung. Ein solches partikuläres Integral enthält demnach keine willkürliche Konstante mehr. Ein Integral der gegebenen Differentialgleichung, welches, ohne ein partikuläres Integral zu sein, keine willkürliche Konstante enthält, heißt eine singuläre Lösung derselben, es kann also nicht aus dem allgemeinen Integral gewonnen werden durch spezielle Wahl von C.

Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung wird geometrisch dargestellt durch eine Kurvenschar. Während jedem partikulären Integrale eine besondere Kurve der Schar entspricht, so stimmt dagegen die singuläre Lösung im allgemeinen überein mit der Enveloppe der Kurvenschar. Die singuläre Lösung einer gegebenen Differentialgleichung kann daher, wenn das allgemeine Integral der letzteren bekannt ist, bestimmt werden, wie Bd. I, pag. 279 angegeben.

Ohne Zuhilfenahme der allgemeinen Lösung kann die singuläre Lösung aus der gegebenen Differentialgleichung

$f(x, y; p) = 0$, wo $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wurde, erhalten werden, indem man die Größe p aus den Gleichungen $f(x, y; p) = 0$ und $\frac{\partial f(x, y; p)}{\partial p} = 0$ eliminiert. Zur Existenz einer singulären Lösung ist erforderlich, daß die gegebene Differentialgleichung $f(x, y; p) = 0$, deren linke Seite als ganze rationale Funktion in bezug auf x, y, p gedacht wird, hinsichtlich p wenigstens vom zweiten Grade sei.

Anm. Zur Bestimmung der singulären Lösung kann auch jedes andere Verfahren angewendet werden, welches dazu dient, die mehrfachen Wurzeln einer gegebenen Gleichung aufzufinden. Hierbei muß jedoch in jedem einzelnen Falle geprüft werden, ob die erhaltene Bedingung, unter welcher die Gleichung $f(x, y; p) = 0$ in bezug auf p eine Doppelwurzel besitzt, überhaupt eine Lösung der Differentialgleichung ergibt.

Es ist eine nützliche Übung, die nachfolgenden Aufgaben nach jeder der soeben erwähnten Methoden zu behandeln.

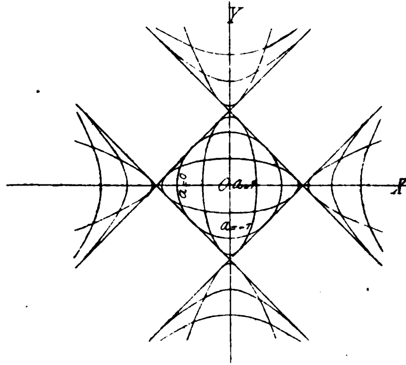
Beispiele.

1) Aufg. Es ist gegeben die Differentialgleichung

$$1) \quad \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)\left(x - y \frac{dy}{dx}\right) = 2 \frac{dy}{dx}$$

und deren allgemeines Integral

$$2) \quad \frac{x^2}{1 + a} + \frac{y^2}{1 - a} = 1.$$



Man bestimme die Enveloppe von 2) und die singuläre Lösung von 1).

Lös.: Bestimmung der Enveloppe von 2). Die Differentiation der Gleichung 2) in bezug auf a ergibt

$$-\frac{x^2}{(1+a)^2}+\frac{y^2}{(1-a)^2}=0 \text{ oder } \frac{y}{1-a}=\pm\frac{x}{1+a}.$$

Hieraus folgen die beiden Werte $a=\frac{x-y}{x+y}$ und $a=\frac{x+y}{x-y}$.
Eliminiert man mit Hilfe derselben die Größe a aus der Gleichung 2), so findet man für die Enveloppe die beiden Gleichungen $(x+y)^2=2$, $(x-y)^2=2$, welche sich in die weiteren zerfällen lassen

$$x+y-\sqrt{2}=0,\ x+y+\sqrt{2}=0,\ x-y-\sqrt{2}=0,$$
$$x-y+\sqrt{2}=0.$$

Die Enveloppe besteht daher aus vier zu den Koordinatenachsen symmetrischen Geraden.

Bestimmung der singulären Lösung von 1). 1) Setzt man $\frac{dy}{dx}=p$ und schreibt die Gleichung 1) in der Form $(x^2+y^2-2)\,p-xy\,(1+p^2)=0$, differentiiert diese Gleichung in bezug auf p, wodurch man erhält $(x^2+y^2-2)-2xy\,p=0$ und eliminiert hierauf aus dieser letzteren und der Gleichung 1) die Größe p, so ergibt sich für die singuläre Lösung

$$(x^2+y^2-2)\frac{x^2+y^2-2}{2xy}-xy\left[1+\left(\frac{x^2+y^2-2}{2xy}\right)^2\right]=0 \text{ oder}$$

$$0=(x^2+y^2-2)^2-4x^2y^2=(x^2+y^2-2+2xy)\,(x^2+y^2-2-$$
$$-2xy)=[(x+y)^2-2]\,[(x-y)^2-2]=$$
$$=(x+y+\sqrt{2})\,(x+y-\sqrt{2})\,(x-y+\sqrt{2})\,(x-y-\sqrt{2}).$$

Demnach ist die singuläre Lösung von 1) identisch mit der bereits gefundenen Enveloppe der Kurvenschar 2).

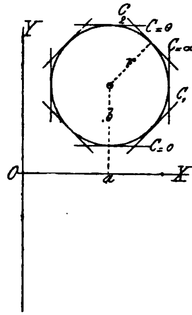
2) Aus der Gleichung 1) findet sich unmittelbar

$$p=\frac{x^2+y^2-2\pm\sqrt{(x^2+y^2-2)^2-4x^2y^2}}{2xy}.$$

Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Existenz einer singulären Lösung ist die, daß die beiden für p gefundenen Werte einander gleich seien. Demnach muß

$(x^2+y^2-2)^2-4x^2y^2=0$ sein. Dieser Gleichung kann dadurch genügt werden, daß man der Reihe nach jeden der vier Faktoren, in welche sich die linke Seite derselben zerfällen läßt, gleich Null setzt. Da die so gewonnenen Gleichungen $x+y\pm\sqrt{2}=0$, $x-y\pm\sqrt{2}=0$ die gegebene Differentialgleichung 1) befriedigen, so stellen sie, in Übereinstimmung mit dem oben gefundenen Resultate, die singuläre Lösung derselben dar.

2) Aufg. Eine Kurve ist so beschaffen, daß die Lote, welche von einem festen Punkte (a, b) auf die Tangenten derselben gefällt werden, die konstante Länge r haben. Es soll die Gleichung der Kurve gefunden werden. (Euler: *Exposition de quelques paradoxes du calcul intégral.* Sammlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahr 1756.)



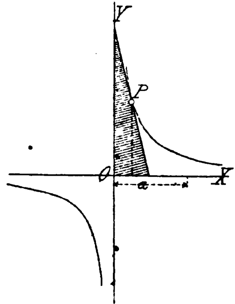
Lös.: Bezeichnet man die laufenden Koordinaten der Tangente an die gesuchte Kurve mit ξ, η, die Koordinaten des Berührungspunktes mit x, y und wird $\frac{dy}{dx}=p$ gesetzt, so lautet die Gleichung der Tangente $\eta-y=p(\xi-x)$. Das vom Punkte (a, b) auf diese Tangente gefällte Lot hat die Länge $\frac{b-y-p(a-x)}{\sqrt{1+p^2}}$. Man hat daher für die Bestimmung der gesuchten Kurve die Differentialgleichung $\frac{p(x-a)-(y-b)}{\sqrt{1+p^2}}=r$.

Die allgemeine Lösung derselben ist $y-b=C(x-a)-r\sqrt{1+C^2}$. Für die singuläre Lösung findet man $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Während die singuläre Lösung den Kreis vom Radius r um den Mittelpunkt (a, b) als Lösung der vorgelegten Aufgabe er-

gibt, so stellt dagegen die allgemeine Lösung die Gesamtheit der Tangenten dieses Kreises dar.

3) Aufg. Man bestimme eine Kurve, für welche die zwischen der Tangente und den beiden Koordinatenachsen enthaltene Fläche den konstanten Inhalt $\frac{1}{2}a^2$ habe.



Lös.: Differentialgleichung der gesuchten Kurve:

$$(y - xp)\left(x - \frac{y}{p}\right) = a^2;$$

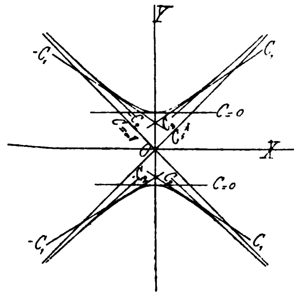
singuläre Lösung dieser Differentialgleichung: $xy = \frac{1}{4}a^2$.

Die verlangte Kurve ist mithin eine auf ihre Asymptoten bezogene gleichseitige Hyperbel.

4) Aufg. Man bestimme die singuläre Lösung der Differentialgleichung

$$(1 + x^2)p^2 - 2p\,xy + y^2 - 1 = 0.$$

(Lagrange: *Calcul des fonctions*, pag. 276.)



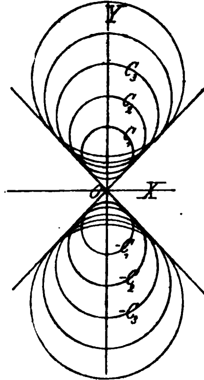
Lös.: Allgemeine Lösung: $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$,

Singuläre Lösung: $y^2 - x^2 = 1$.

5) **Aufg.** Es soll die allgemeine und die singuläre Lösung der Differentialgleichung

$$p^2(2x^2 - y^2) - 2xyp + x^2 = 0$$

gefunden werden.



Lös.: Aus der gegebenen Differentialgleichung folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy \pm x\sqrt{2(y^2 - x^2)}}{2x^2 - y^2} \text{ oder}$$

$$(2x^2 - y^2)\,dy = [xy \pm x\sqrt{2(y^2 - x^2)}]\,dx.$$

Als allgemeines Integral dieser homogenen Differentialgleichung ergibt sich

$$x^2 + (y - C)^2 = \tfrac{1}{2}C^2;$$

die singuläre Lösung wird $y = \pm x$.

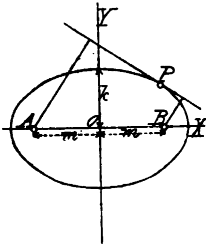
Die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung stellt demnach eine Schar von Kreisen dar, deren Mittelpunkte auf der Y-Achse liegen und welche sämtlich von den Geraden $y = \pm x$ berührt werden.

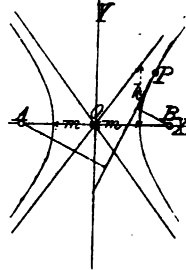
6) Aufg. Man bestimme eine Kurve von der Eigenschaft, daß das Produkt der Lote, die von zwei festen Punkten auf eine beliebige Tangente der Kurve gefällt werden, den konstanten Wert k^2 habe. (Lagrange: *Calcul des fonctions* pag. 282.)

Lös.: Ist $2m$ die Entfernung der beiden gegebenen Punkte A und B und wählt man die Gerade AB zur X-Achse und die Mitte von AB zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so lautet die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der gesuchten Kurve, wenn die Bezeichnungen der Auf-

gabe 2) gelten: $\eta - y = p(\xi - x)$. Die Längen der von den Punkten $A(-m, 0)$ und $B(+m, 0)$ auf diese Tangente gefällten Lote werden beziehungsweise

$$\pm \frac{y + p(-m - x)}{\sqrt{1 + p^2}} \text{ und } \pm \frac{y + p(m - x)}{\sqrt{1 + p^2}}.$$





Die verlangte Kurve genügt somit der Differentialgleichung

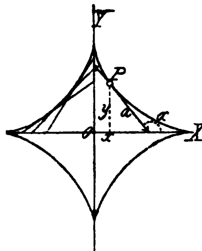
$$\pm \frac{[y - p(m + x)][y - p(x - m)]}{1 + p^2} = k^2.$$

Je nachdem man das obere oder das untere Zeichen berücksichtigt, erhält man für die singuläre Lösung

$$\frac{x^2}{m^2 + k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1 \text{ oder } \frac{x^2}{m^2 - k^2} - \frac{y^2}{k^2} = 1.$$

Die gesuchte Kurve ist daher eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem die von den gegebenen Punkten auf die Tangenten gefällten Lote gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Die Realität der Hyperbel ist an die Bedingung $m^2 > k^2$ geknüpft. Die Punkte A und B sind die Brennpunkte der gefundenen Kurven.

7) Aufg. Es soll eine Kurve gefunden werden, für welche die zwischen den Koordinatenachsen liegenden Stücke ihrer Tangenten die konstante Länge a haben.



Lös.: Differentialgleichung der verlangten Kurve:

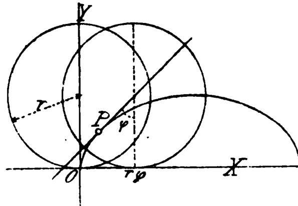
$$y = px + a\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

allgemeine Lösung derselben: $y = Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$,

singuläre Lösung: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Die singuläre Lösung ist somit eine Asteroide (vgl. Bd. I, pag. 228); die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung stellt die Gesamtheit der Tangenten der Asteroide dar.

8) Aufg. Ein Kreis vom Radius r rollt auf einer gegebenen geraden Linie. Welche Kurve wird bei dieser Bewegung von einem Durchmesser des Kreises eingehüllt?



Lös.: Wird die gegebene Gerade zur X-Achse und der bewegliche Durchmesser in seiner Anfangslage zur Y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt, ist ferner φ der Winkel, den dieser Durchmesser in irgend einer seiner Lagen mit der Anfangslage bildet, so lautet die Gleichung desselben

$$1)\quad y - r = \operatorname{cotang}\varphi \cdot (x - r\varphi).$$

Für die Enveloppe dieser Geraden findet man auf bekannte Weise die Zykloide

$$x = \tfrac{1}{2}r\,(2\varphi - \sin 2\varphi),\quad y = \tfrac{1}{2}r\,(1 - \cos 2\varphi).$$

Sieht man die Gleichung 1) als die Gleichung einer Kurvenschar mit dem variablen Parameter φ an, so ergibt sich die zugehörige Differentialgleichung

$$2)\quad y - r = p\,(x - r\operatorname{arccotang} p).$$

Differentiiert man dieselbe nach p:

$$3)\quad x - r\operatorname{arccotang} p + \frac{pr}{1+p^2} = 0$$

und berechnet aus dieser und der Gleichung 2) die Größen x und y, so erhält man

$$x = r\left(\text{arccotang}\, p - \frac{p}{1+p^2}\right) = \tfrac{1}{2}r\,(2\varphi - \sin 2\varphi)$$

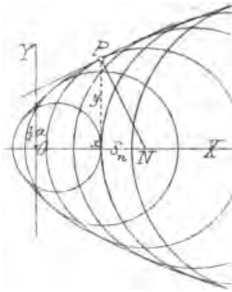
$$y = r\left(1 - \frac{p^2}{1+p^2}\right) = \tfrac{1}{2}r\,(1 - \cos 2\varphi).$$

Diese beiden Gleichungen zusammengenommen, oder die aus ihnen hervorgehende Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}r\left[\arccos\frac{r-2y}{r} - \frac{2}{r}\sqrt{ry - y^2}\right]$$

bilden die singuläre Lösung der Differentialgleichung 2).

9) Aufg. Man bestimme die Kurven von der Eigenschaft, daß in jedem ihrer Punkte die Normale die mittlere Proportionale ist zwischen einer Linie von der konstanten Länge a und der um die Abszisse x vermehrten Subnormale. (Leibniz: *Acta eruditorum* für 1694.)



Lös.: Differentialgleichung der gesuchten Kurven:

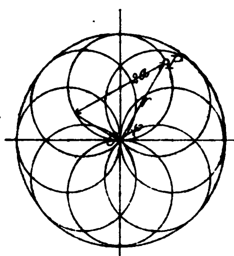
$$a\,(x + yp) = y^2\,(1 + p^2),$$

allgemeine Lösung derselben: 1) $y^2 + (x - C)^2 = aC$,
singuläre Lösung: 2) $y^2 = a\,(x + \tfrac{1}{4}a)$.

Der gestellten Aufgabe wird daher genügt durch die Kreisschar 1) und die Parabel 2), welche sämtliche Kreise der Schar berührt.

10) Aufg. Es sollen die Kurven bestimmt werden, deren Polarnormalen die konstante Länge $2a$ besitzen.

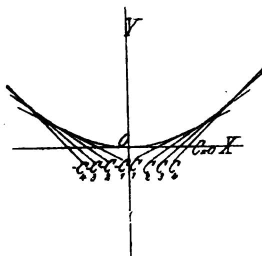
Lös.: Bei Anwendung von Polarkoordinaten ergibt sich für die verlangten Kurven die Differentialgleichung $\sqrt{r^2 + p^2} = 2a$, wo $p = \frac{dr}{d\varphi}$.



Die allgemeine Lösung derselben ist $\varphi - \varphi_0 = \arcsin \frac{r}{2a}$ oder $r = 2a \sin(\varphi - \varphi_0)$ und die singuläre Lösung $r = 2a$.

Die gesuchten Kurven sind sonach Kreise vom Radius a, welche durch den Pol gehen und vom Kreise $r = 2a$ berührt werden. Der letztere Kreis ist selbstverständlich ebenfalls eine Lösung der gestellten Aufgabe.

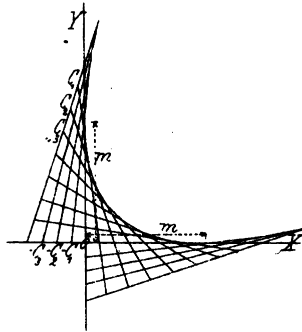
11) Aufg. Gegeben ist die Differentialgleichung 1) $y = px - 4p^2$ und deren allgemeines Integral 2) $y = Cx - 4C^2$. Welches ist die singuläre Lösung der ersteren?



Lös.: 3) $y = \frac{1}{16}x^2$.

Die Gleichung 2) stellt für jeden besonderen Wert der Konstanten C eine Tangente der Parabel 3) dar.

12) Aufg. Gegeben die Gleichung einer Schar von geraden Linien $\frac{x}{C} + \frac{y}{m - C} = 1$, wo C einen variablen Parameter bedeutet. Man bestimme die zugehörige Differentialgleichung und deren singuläre Lösung.

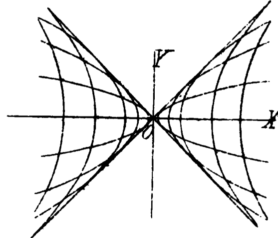


Lös.: Differentialgleichung: $(1-p)(px-y)=mp$;
singuläre Lösung: $(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=m$.

13) Aufg. Es ist gegeben die Gleichung einer Schar von Parabeln

$$y^2=2ax-a^2;$$

es wird die zugehörige Differentialgleichung und deren singuläre Lösung gesucht.



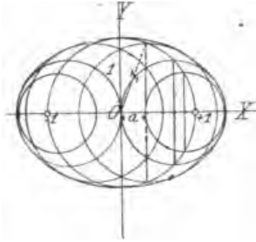
Lös.: Differentialgleichung: $y^2p^2-2xyp+y^2=0$,
singuläre Lösung: $y=\pm x$.

Sämtliche Parabeln der gegebenen Schar werden von den beiden Geraden $y=\pm x$ berührt.

14) Aufg. In dem Kreise $x^2+y^2=1$ zieht man parallel zur Y-Achse eine Schar von Sehnen und über denselben als Durchmesser Kreise. Die Gleichung der auf diese Weise entstehenden Kreisschar lautet:

$$1)\ (x-a)^2+y^2=1-a^2,$$

wo a einen variablen Parameter bedeutet. Es soll die zugehörige Differentialgleichung und deren singuläre Lösung gefunden werden.



Lös.: Differentialgleichung:

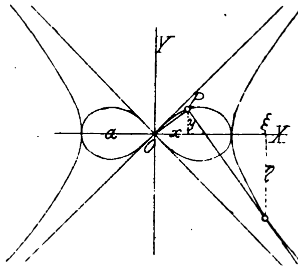
$$2)\ 2y^2p^2 + 2xyp + x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

singuläre Lösung: 3) $\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Es ist bemerkenswert, daß nur diejenigen Kreise der Schar die Enveloppe berühren, für welche $a^2 < 1 - a^2$, d. h. $a^2 < \frac{1}{2}$ ist. Der Grenzfall $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ liefert den oskulierenden Kreis im Scheitel der Ellipse 3). Die Brennpunkte der Ellipse, nämlich die beiden Grenzpunkte $y = 0$, $x = \pm 1$ sind ebenfalls als Kreise der Schar, d. h. als partikuläre Lösungen der Differentialgleichung 2) anzusehen.

Als Bedingung, unter welcher sich für p gleiche Wurzeln ergeben, tritt auch $y = 0$, d. h. die X-Achse auf. Da $y = 0$ die Differentialgleichung 2) jedoch nicht befriedigt, so gehört diese Gerade nicht zur singulären Lösung.

15) Aufg. Zu welcher Kurve gehört die Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ als Fußpunktkurve für den Anfangspunkt der Koordinaten als Pol?



Lös.: Die Gleichung der Tangente im Punkte (ξ, η) der gesuchten Kurve lautet, wenn man die laufenden Koordinaten mit

X, Y bezeichnet, $Y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(X - \xi)$; das Lot von O auf diese Tangente hat die Gleichung $Y = -\frac{d\xi}{d\eta} X$. Diese beiden Geraden müssen durch den Punkt (x, y) der gegebenen Kurve gehen; man hat daher zur Bestimmung der gesuchten Kurve, wenn man noch $\frac{d\eta}{d\xi} = p$ setzt, die Gleichungen

$$1)\quad y - \eta = p(x - \xi),$$

$$2)\quad y = -\frac{1}{p} x,$$

$$3)\quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

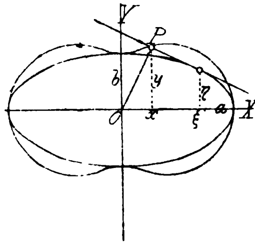
Durch Elimination der Größen x, y aus diesen Gleichungen gelangt man zu der Differentialgleichung

$$(\eta - p\xi)^2 = a^2(p^2 - 1).$$

Das allgemeine Integral der letzteren ist $\eta = C\xi + a\sqrt{C^2 - 1}$; die singuläre Lösung wird $\xi^2 - \eta^2 = a^2$.

Die verlangte Kurve ist demnach eine gleichseitige Hyperbel, deren Tangenten durch die allgemeine Lösung gegeben werden.

16) Aufg. Es soll die Basis der Fußpunktkurve $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ für den Koordinatenanfangspunkt als Pol bestimmt werden.



Lös.: Bei Anwendung des in der vorhergehenden Nummer angegebenen Verfahrens findet man die Differentialgleichung

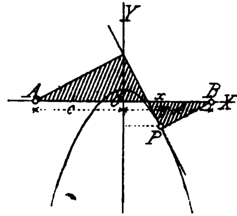
1) $(p\xi - \eta)^2 = a^2p^2 + b^2$, deren allgemeine Lösung,

2) $\eta = C\xi - \sqrt{a^2C^2 + b^2}$ und deren singuläre Lösung,

3) $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$ ist.

Die verlangte Kurve ist somit eine Ellipse, deren Tangenten durch die Gleichung 2) bestimmt sind.

17) Aufg. Man sucht eine Kurve von der Eigenschaft, daß das Trapez, welches gebildet wird durch die Tangente in irgend einem Punkte der Kurve, die Lote von zwei gegebenen Punkten A und B auf diese Tangente, und die Gerade AB, einen konstanten Flächeninhalt $= a^2$ habe. (*Nouvelles Annales de Math.* Bd. IV. pag. 364.)



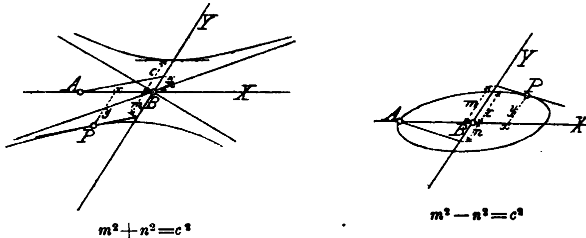
Lös.: Sei die Entfernung der gegebenen Punkte $AB = 2c$. Wird die Gerade AB zur X-Achse und die Mitte von AB zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt, so lautet die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der Kurve $\eta - y = p(\xi - x)$, wo ξ, η die laufenden Koordinaten bedeuten und $p = \frac{dy}{dx}$ ist. Für die Längen der Lote von den Punkten $A(-c, 0)$, $B(+c, 0)$ auf diese Tangente findet man $\frac{y - p(c + x)}{\sqrt{1 + p^2}}$ und $\frac{y + p(c - x)}{\sqrt{1 + p^2}}$. Hiernach wird der Flächeninhalt des in der Aufgabe genannten Trapezes $\frac{2c(y - px)}{1 + p^2}$, und man hat daher die Differentialgleichung

$$\frac{2c(y - px)}{1 + p^2} = a^2.$$

Das allgemeine Integral derselben ist $y = Cx + \frac{a^2}{2c}(1 + C^2)$; als singuläre Lösung ergibt sich $y - \frac{a^2}{2c} = -\frac{c}{2a^2}x^2$.

18) Aufg. Es ist eine feste Gerade gegeben, auf derselben ein Punkt B und überdies ein außerhalb der Geraden liegender fester Punkt A. Es soll eine Kurve gefunden werden von der Beschaffenheit, daß, wenn man in einem beliebigen Punkte derselben eine Tangente und durch A eine Parallele zu dieser Tan-

gente zieht, diese beiden Geraden zwei von B aus gezählte Abschnitte m und n auf der festen Geraden bestimmen, welche der Relation $m^2 \pm n^2 = c^2$ genügen. (*Nouvelles Annales de Math.* Bd. XIX, pag. 154.)



$m^2 + n^2 = c^2$ $m^2 - n^2 = c^2$

Lös.: Macht man die Gerade AB zur X-Achse, die gegebene Gerade zur Y-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems und ist $AB = a$, so lautet die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der gesuchten Kurve $\eta - y = p(\xi - x)$ und die Gleichung der durch A gehenden Parallelen $\eta = p(\xi + a)$. Hiernach wird $m = y - px$, $n = ap$, und man hat daher die Differentialgleichung

$$(y - px)^2 \pm a^2p^2 = c^2.$$

Das allgemeine Integral derselben ist $y = Cx \pm \sqrt{c^2 \mp a^2C^2}$; die singuläre Lösung wird $\frac{y^2}{c^2} \mp \frac{x^2}{a^2} = 1$. Die verlangte Kurve ist demnach eine auf konjugierte Durchmesser bezogene Hyperbel oder Ellipse, je nachdem in der Beziehung $m^2 \pm n^2 = c^2$ das obere oder das untere Zeichen berücksichtigt wird.

§ 12. Differentialgleichungen erster Ordnung von höherem Grade.

Einleitung. α) Die gegebene Differentialgleichung $f(p) = 0$, wo p für $\frac{dy}{dx}$ steht, enthalte weder x noch y und sei in bezug auf p vom $n$ten Grade. Den n Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ der Gleichung $f(p) = 0$ entsprechen n einzelne Differentialgleichungen $p - \alpha_1 = 0$, $p - \alpha_2 = 0, \ldots p - \alpha_n = 0$, deren Integrale sind $y = \alpha_1 x + C_1$, $y = \alpha_2 x + C_2, \ldots y = \alpha_n x + C_n$. Das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist demnach das Produkt

$$(y - \alpha_1 x - C_1)(y - \alpha_2 x - C_2) \ldots (y - \alpha_n x - C_n) = 0,$$

worin noch sämtliche Konstanten C einander gleich gesetzt werden können. Geometrisch wird dasselbe repräsentiert durch n Scharen von parallelen Geraden, deren Neigungswinkel gegen die X-Achse bestimmt sind durch: $\operatorname{tang} \varphi_1 = \alpha_1$, $\operatorname{tang} \varphi_2 = \alpha_2$ usw.

β) Wenn in der Differentialgleichung $f(x, p) = 0$ die Variable y nicht vorkommt, so ergibt sich $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$, also $y = \int \varphi(x)\, dx + C$. In diesem Falle sind die das Integral darstellenden Kurven kongruent und können sämtlich aus einer einzigen derselben durch Verschiebung in der Richtung der Y-Achse erhalten werden.

Wenn sich die Gleichung $f(x, p) = 0$ nach x leichter auflösen läßt, als nach p, so wird zweckmäßig p als neue Veränderliche eingeführt. Es findet sich dann $x = \varphi(p)$ aus der gegebenen Gleichung $f(x, p) = 0$ direkt und $y = \int p\, \varphi'(p)\, dp + C$ mit Hilfe der Gleichung $dy = p dx$. Falls die Elimination von p aus den so erhaltenen Ausdrücken für x und y möglich ist, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y.

γ) Kommt in der gegebenen Differentialgleichung $f(y, p) = 0$ die Variable x nicht vor, so findet sich entweder

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y), \quad \frac{dy}{\varphi(y)} = dx, \quad \text{also } x + C = \int \frac{dy}{\varphi(y)},$$

$$\text{oder } y = \psi(p), \quad dy = \psi'(p)\, dp,$$

$$dx = \frac{\psi'(p)}{p}\, dp, \quad x + C = \int \frac{\psi'(p)}{p}\, dp.$$

Da die Konstante C nur in der Verbindung $x + C$ in das allgemeine Integral eingeht, so sind die Kurven der Schar, welche die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung darstellt, kongruent und können sämtlich aus einer einzigen derselben durch Verschiebung in der Richtung der X-Achse erhalten werden.

δ) Enthält die Differentialgleichung $f(x, y; p) = 0$ außer p sowohl x, als y, so zerfällt sie, wenn die Auflösung nach p möglich ist, in die n Differentialgleichungen $p - \varphi_1(x, y) = 0$, $p - \varphi_2(x, y) = 0$, $\ldots p - \varphi_n(x, y) = 0$. Wenn $y = F_1(x, C_1)$, $y = F_2(x, C_2)$, $\ldots y = F_n(x, C_n)$ deren Integrale sind, so erscheint das allgemeine Integral in der Form des Produktes

$$[y - F_1(x, C_1)]\,[y - F_2(x, C_2)] \ldots [y - F_n(x, C_n)] = 0,$$
worin sämtliche Konstanten C einander gleichgesetzt werden können.

Wenn sich die gegebene Differentialgleichung leichter nach y als nach p auflösen läßt, so betrachte man p als unabhängige Variable, und es ergebe sich etwa $y = F(x, p)$; dann ist $dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial p} dp\right)$. Wenn diese letztere Gleichung integrabel ist, hat man zwei Gleichungen, aus welchen sich in manchen Fällen durch Elimination der Größe p eine Gleichung zwischen x und y herstellen läßt.

Ist die vorgelegte Differentialgleichung leicht nach x auflösbar, so führt ein analoges Verfahren zum Ziel.

Beispiele.

Vorbemerkung. Als hierhergehörig können auch sämtliche unter der Überschrift „Singuläre Lösung" aufgeführten Beispiele betrachtet werden.

1) $p^3 - 7p + 6 = 0.$

Lös.: Es ist $p^3 - 7p + 6 = (p-1)(p-2)(p+3)$. Demnach zerfällt die gegebene Differentialgleichung in die drei folgenden:
$$p - 1 = 0, \quad p - 2 = 0, \quad p + 3 = 0,$$
deren Integrale $y = x + C_1$, $y = 2x + C_2$, $y = -3x + C_3$ sind. Das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung wird demnach, indem man sämtliche Integrationskonstanten einander gleichsetzt
$$(y - x - C)(y - 2x - C)(y + 3x - C) = 0.$$

Geometrisch wird dasselbe dargestellt durch drei Scharen von parallelen Geraden.

2) $p^2 + \frac{2\sqrt{3} - 1}{2} p - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$

Lös.: $(y - \frac{1}{2}x - C)(y + x\sqrt{3} - C) = 0.$

3) $p^2 = \frac{a}{x}.$

Lös.: 1. Methode: $p = \pm\sqrt{\frac{a}{x}},$

$$y = \pm \int \sqrt{\frac{a}{x}}\, dx + C = \pm\, 2\sqrt{ax} + C.$$

2. Methode: $x = \frac{a}{p^2}$, $dy = pdx = -\frac{2a}{p^3}\, pdp = -\frac{2a}{p^2}\, dp$,

$$y = +\frac{2a}{p} + C.$$

Eliminiert man aus den beiden für x und y gefundenen Werten die Größe p, so folgt wie oben

$$y = \pm\, 2\sqrt{ax} + C.$$

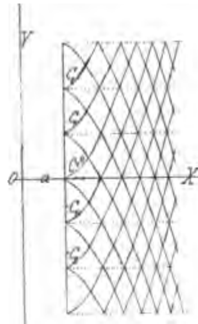
4) $x = 1 + p^3$.

Lös.: 1. Methode: $p = (x-1)^{\frac{1}{3}}$, $y - C = \frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}$.

2. Methode: $x = 1 + p^3$, $dy = pdx = 3p^3 dp$, $y = \frac{3}{4}p^4 + C$,

$$y - C = \tfrac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}.$$

5) $x = a + \frac{4}{9}p^2$. Lös.: $y - C = (x-a)^{\frac{3}{2}}$.



Die allgemeine Lösung stellt eine Schar von semikubischen Parabeln dar, deren Achsen der X-Achse parallel sind und deren Spitzen auf der Geraden $x = a$ liegen.

6) $x = p + p^2 + p^3$.

Lös.: $\begin{cases} x = p + p^2 + p^3, \\ y = \frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{3}p^3 + \frac{3}{4}p^4 + C. \end{cases}$

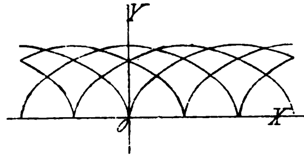
7) $y = p^2 + 2p^3$.

Lös.: $\begin{cases} x - C = 2p + 3p^2, \\ y = p^2 + 2p^3. \end{cases}$

8) $y = ap^2 + bp^3 + cp^5$.

Lös.: $\begin{cases} y = ap^2 + bp^3 + cp^5, \\ x - C = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + \frac{5}{4}cp^4. \end{cases}$

9) $y = \dfrac{2a}{1+p^2}$.



Lös.: 1) $\begin{cases} y = \dfrac{2a}{1+p^2}, \\ x - C = -2a\left[\dfrac{p}{1+p^2} + \operatorname{arctang} p\right]. \end{cases}$

Setzt man $p = \operatorname{cotang} \frac{1}{2}\varphi$, so folgt $\begin{cases} y = a(1 - \cos\varphi), \\ x - C_1 = a(\varphi - \sin\varphi). \end{cases}$

2) Macht man in der gegebenen Gleichung $p = \operatorname{tang} \alpha$, so folgt

$$y = 2a\cos^2\alpha = a(1 + \cos 2\alpha),$$

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tang}\alpha} = -4a\cos^2\alpha\, d\alpha = -2a(1 + \cos 2\alpha)\, d\alpha,$$

$$x - C = -2a(\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha).$$

Substituiert man noch $2\alpha = \pi - \varphi$, so ergibt sich

$$\begin{cases} y = a(1 - \cos\varphi), \\ x - C_1 = a(\varphi - \sin\varphi). \end{cases}$$

3) $p = \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{2a - y}{y}}, \quad dx = dy\sqrt{\dfrac{y}{2a - y}},$

$$x - C = a \arccos\frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

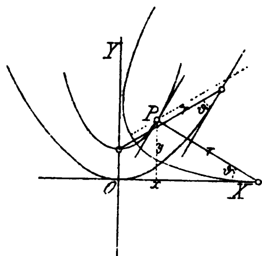
Die allgemeine Lösung stellt eine Schar von Zykloiden dar, deren Spitzen auf der X-Achse liegen.

10) Aufg. Die Parabel $r = \dfrac{2a}{1 + \cos\varphi}$ rollt auf der X-Achse. Welche Kurve beschreibt ihr Brennpunkt bei dieser Bewegung?

Lös.: Bezeichnet ϑ den Winkel, den die Tangente in irgend einem Punkte der Parabel mit dem Leitstrahl einschließt und

sind x, y die rechtwinkligen Koordinaten des entsprechenden Punktes der gesuchten Kurve, so findet man

$$y = r \sin \vartheta, \quad p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotang} \vartheta.$$



Nun ist

$$\sin \vartheta = \frac{r d\varphi}{ds} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}} = \cos \tfrac{1}{2}\varphi, \quad \operatorname{cotang} \vartheta = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

folglich $p = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$,

$$y = r \cos \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2a \cos \frac{1}{2}\varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{2a \cos \frac{1}{2}\varphi}{2 \cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = \frac{a}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = a\sqrt{1 + p^2}.$$

Man hat daher die Differentialgleichung $y = a\sqrt{1 + p^2}$.

Als allgemeines Integral derselben ergibt sich

$$x - x_0 = a\,l\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}\right) \text{ oder } 1)\ \frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} = e^{\frac{x - x_0}{a}};$$

ferner ist 2) $\dfrac{1}{\dfrac{y}{a} + \sqrt{\dfrac{y^2}{a^2} - 1}} = \dfrac{y}{a} - \sqrt{\dfrac{y^2}{a^2} - 1} = e^{-\frac{x - x_0}{a}};$

addiert man die Gleichungen 1) und 2), so kommt

$$y = \tfrac{1}{2}a\left[e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{x - x_0}{a}}\right].$$

Die gesuchte Kurve ist demnach eine Kettenlinie. Zur Bestimmung der Konstanten x_0 dient die Bemerkung, daß für $x = 0$ $y = a$ werden soll. Hiernach wird $x_0 = 0$.

11) 1) $y = xp^2 + p^2 \sin p$.

Lös.: Durch Differentiation folgt

$$p\,dx = p^2 dx + 2px\,dp + 2p \sin p\,dp + p^2 \cos p\,dp.$$

Der Faktor p darf weggehoben werden, da $p=0$ der gegebenen Differentialgleichung zufolge nur die X-Achse ergäbe. Es bleibt daher

$$dx = p\,dx + 2x\,dp + 2\sin p\,dp + p\cos p\,dp \quad \text{oder}$$

$$(1-p)\frac{dx}{dp} - 2x = 2\sin p + p\cos p.$$

Diese Differentialgleichung ist in bezug auf x linear. Ihr allgemeines Integral lautet

$$2)\quad x = \frac{-\cos p + p\sin p - p^2\sin p + C}{(1-p)^2}.$$

Die beiden zusammengehörigen Gleichungen 1) und 2) sind als das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung anzusehen.

12) $y = xp^2 + ap^3 + bp^4 + cp^5$;

Lös.: $$\begin{cases} y = xp^2 + ap^3 + bp^4 + cp^5, \\ x = \dfrac{1}{(1-p)^2}\left[C + \tfrac{3}{2}ap^2 + \dfrac{4b-3a}{3}p^3 + \dfrac{5c-4b}{4}p^4 - cp^5\right]. \end{cases}$$

13) $y = px - \frac{1}{2}p^2$.

Lös.: $dy = p\,dx = p\,dx + x\,dp - p\,dp$ oder $(x-p)\,dp = 0$.

Dieser Gleichung kann dadurch genügt werden, daß man $dp=0$ oder aber $x-p=0$ setzt.

Die Annahme $dp=0$ ergibt $p=C$ und der gegebenen Gleichung zufolge 1) $y = Cx - \frac{1}{2}C^2$.

Die Gleichung $x-p=0$ liefert 2) $y = \frac{1}{2}x^2$.

Da die beiden Gleichungen 1) und 2) der gegebenen Differentialgleichung genügen, die Gleichung 2) jedoch keine willkürliche Konstante enthält und auch nicht durch Spezialisierung der Konstanten aus der Gleichung 1) hervorgegangen ist, so stellt die Gleichung 1) die allgemeine und die Gleichung 2) die singuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung dar. Geometrisch repräsentiert das allgemeine Integral die Gesamtheit der Tangenten der singulären Lösung. (Vgl. § 11, Aufg. 11).)

14) $y = px + p - \frac{1}{4}p^2$.

Lös.: Allgemeine Lösung: $y = Cx + C - \frac{1}{4}C^2$,
singuläre Lösung: $y = (x+1)^2$.

15) $yp^2 - 2xp + y = 0$.

Lös.: 1) Aus der Differentialgleichung folgt

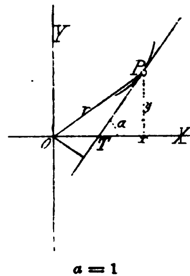
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{y} \text{ oder } ydy = (x \pm \sqrt{x^2 - y^2})\, dx.$$

Diese Differentialgleichung ist homogen und kann daher auf bekannte Weise integriert werden.

2) Löst man die gegebene Differentialgleichung nach y auf, so wird $y = \frac{2px}{1+p^2}$, $pdx = -\frac{2x\,dp}{1+p^2}$, $-\frac{dx}{2x} = \frac{dp}{p(1+p^2)}$ usw.

Das allgemeine Integral ist $y^2 = \frac{2}{C}x - \frac{1}{C^2}$ und die singuläre Lösung $y = \pm x$. Die erstere stellt eine Schar von Parabeln dar, welche sämtlich von den beiden Geraden $y = \pm x$ berührt werden.

16) Aufg. Man bestimme eine Kurve, für welche der Abstand des Koordinatenanfangspunktes von irgend einer Tangente derselben α) gleich der ersten Potenz, β) gleich dem Quadrat, γ) gleich dem Kubus des Leitstrahles sei, der nach dem Berührungspunkt geführt wird.



$a = 1$

Lös.: α) Der Abstand des Koordinatenanfangspunktes von einer Tangente der gesuchten Kurve ist gegeben durch den Ausdruck $\frac{y - xp}{\sqrt{1+p^2}}$, wo $p = \frac{dy}{dx}$. Sonach besteht die Differentialgleichung $\frac{y - xp}{\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Führt man Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein, so geht dieselbe über in die folgende

$$-\frac{r^2 d\varphi}{\sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2}} = r \quad \text{oder} \quad -r d\varphi = \sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2},$$

$(r d\varphi)^2 = (r d\varphi)^2 + dr^2 = 0$, $dr = 0$, woraus sich ergibt $r = C$.

Diese Gleichung stellt eine Schar von Kreisen dar, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist.

β) Differentialgleichung: $-r^2 d\varphi = r^2 \sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2}$ oder

$$d\varphi = -\frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}};$$

allgemeines Integral derselben: $\varphi - \varphi_0 = \arcsin r$ oder

$$r = \sin(\varphi - \varphi_0).$$

Es ist dies die Gleichung einer Schar von Kreisen vom Radius $\frac{1}{2}$, welche sämtlich durch den Pol gehen und von dem Kreise $r = 1$ berührt werden. (Vgl. § 11, Aufg. 10).)

γ) Differentialgleichung: $-r^2 d\varphi = r^3 \sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2}$ oder

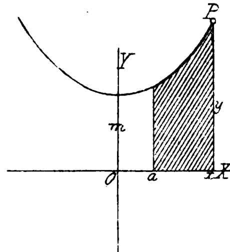
$$r dr = \sqrt{1 - r^4}\, d\varphi;$$

allgemeines Integral: $\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{2} \arcsin (r^2)$ oder

$$r^2 = \sin 2(\varphi - \varphi_0).$$

Als Lösung der gestellten Aufgabe ergibt sich somit in diesem Falle eine Schar von Lemniskaten, deren Achsen die Länge 1 haben und um den Winkel $45^0 + \varphi_0$ gegen die X-Achse gedreht sind.

17) Aufg. Es soll eine Kurve gefunden werden, deren von $x = a$ bis $x = x$ gerechnete Fläche F zur entsprechenden Bogenlänge s in einem konstanten Verhältnisse m steht.



Lös.: Da $F = \int_a^x y dx$, $s = \int_a^x \sqrt{1 + p^2}\, dx$, so wird $\int_a^x y dx = m \int_a^x \sqrt{1 + p^2}\, dx$. Hieraus folgt durch Differentiation

$$y = m\sqrt{1 + p^2}.$$

Als allgemeines Integral dieser Differentialgleichung ergibt sich (vgl. Aufg. 10))

$$y = \tfrac{1}{2} m \left[e^{\frac{x+C}{m}} + e^{-\frac{x+C}{m}} \right],$$

und es ist daher die gesuchte Kurve eine Kettenlinie, welche, da C unbestimmt bleibt, noch einer weiteren Bedingung unterworfen werden kann.

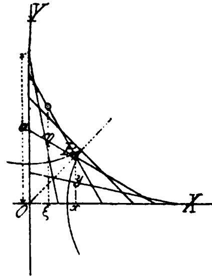
18) Aufg. Für welche Kurve ist die Bogenlänge gleich der nach dem Radius vector genommenen Ableitung des Ausdrucks, welcher den entsprechenden Polarsektor derselben bestimmt?

Lös.: Es ist $\frac{d}{dr} \tfrac{1}{2} \int_0^\varphi r^2 d\varphi = \int_0^\varphi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\, d\varphi.$

Hieraus folgt durch Differentiation $r = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$, $\frac{dr}{d\varphi} = 0$, und durch Integration $r = \text{Const.}$

Die verlangte Kurve ist demnach ein Kreis.

19) Aufg. Es soll die Evolvente der Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ in der Weise bestimmt werden, daß man sie als orthogonale Trajektorie der Tangenten der gegebenen Kurve betrachtet.



Lös.: Bezeichnet man die Koordinaten eines beliebigen Punktes der gegebenen Kurve mit ξ, η, diejenigen des entsprechenden Punktes der Evolvente mit x, y und wird noch $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt, so bestehen die Beziehungen

α) $y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi)$, (Bedingung, daß die Tangente im Punkte (ξ, η) der gegebenen Kurve den Punkt (x, y) der Evolvente enthalte),

$\beta)\ \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{p}$, (Bedingung, daß die Tangente der gegebenen Kurve Normale der Evolvente sei), $\gamma)\ \xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen die Größen ξ, η, so gelangt man zu der Differentialgleichung

$$1)\ yp + x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Durch Differentiation ergibt sich $pdy + ydp + dx = \frac{adp}{\sqrt{1+p^2}^3}$, oder da $dx = \frac{dy}{p}$.

$$2)\ dy\sqrt{1+p^2} + y\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}dp = \frac{ap\,dp}{(1+p^2)^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser linearen Differentialgleichung lautet:

$$3)\ y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[C - \frac{a}{2(1+p^2)}\right],$$

und die Gleichung 1) liefert

$$4)\ x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left[a - C + \frac{a}{2(1+p^2)}\right].$$

Durch die zusammengehörigen Gleichungen 3) und 4) ist eine Schar von Evolventen bestimmt.

Setzt man $p = \operatorname{tang}\varphi$ und beispielsweise $C = \frac{3}{4}a$, so folgt

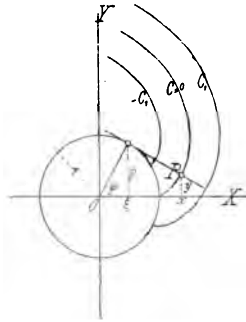
$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}a\sin\varphi\,[\sin^2\varphi + 3\cos^2\varphi], \\ y = \frac{1}{4}a\cos\varphi\,[\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi]. \end{cases}$$

Vergleicht man diese Werte mit den auf Bd. I, S. 229 bei Bestimmung der Evolute der Asteroide gefundenen, so erkennt man, daß diese spezielle Evolvente der gegebenen Kurve wieder eine Asteroide ist und zwar eine solche, bei welcher der Radius des festen Kreises $\frac{1}{2}a$ und somit der des rollenden Kreises $\frac{1}{8}a$ ist. Man kann daher leicht zu den Formeln gelangen

$$X = \frac{1}{2}a\cos^3\psi,\quad Y = \frac{1}{2}a\sin^3\psi.$$

20) Aufg. Man bestimme auf dieselbe Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Evolvente des Kreises

$$\xi = r\cos\varphi,\quad \eta = r\sin\varphi.$$



Lös.: Differentialgleichung: 1) $x + yp = r\sqrt{1+p^2}$, allgemeines Integral derselben:

$$2)\left\{\begin{array}{l} y = r\dfrac{p - \operatorname{arctang} p + C}{\sqrt{1+p^2}}, \\ x = r\dfrac{1 + p\operatorname{arctang} p - pC}{\sqrt{1+p^2}}, \end{array}\right.$$

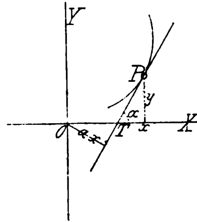
Setzt man noch $p = \operatorname{tang}\varphi$, so wird

$$3)\left\{\begin{array}{l} x = r(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi - C\sin\varphi), \\ y = r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi + C\cos\varphi). \end{array}\right.$$

Für $C = 0$ ergibt sich die Bd. I, S. 210 untersuchte, spezielle Kreisevolvente.

Der Krümmungsradius ϱ der Evolvente 3) wird $\varrho = r(\varphi - C)$. Welche allgemeine Eigenschaft der Evolventen einer gegebenen Kurve findet hierdurch für den vorliegenden Fall ihre Bestätigung?

21) Aufg. Man finde eine Kurve, für welche der Abstand des Nullpunktes von irgend einer Tangente derselben der Abszisse des Berührungspunktes proportional ist.



Lös.: Differentialgleichung: $\dfrac{y - xp}{\sqrt{1+p^2}} = ax$;

allgemeines Integral: $\begin{cases} x = \dfrac{C}{\sqrt{1+p^2}\sqrt[a]{p+\sqrt{1+p^2}}}, \\ y = C \cdot \dfrac{p + a\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}\sqrt[a]{p+\sqrt{1+p^2}}}. \end{cases}$

In dem speziellen Falle $a = 1$ ergibt sich

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{\sqrt{1+p^2}\,(p+\sqrt{1+p^2})}, \\ y = \dfrac{C}{\sqrt{1+p^2}}, \end{cases}$$

oder, indem man $p = \operatorname{cotang} \varphi$ setzt

$$\begin{cases} x - C = -C\cos\varphi \\ \quad\;\; y = C\sin\varphi \end{cases} \text{ oder } y^2 + (x-C)^2 = C^2.$$

Es ist dies die Gleichung einer Schar von Kreisen, welche sämtlich durch den Nullpunkt gehen und deren Mittelpunkte auf der X-Achse liegen. Der Koordinatenanfangspunkt ist ebenfalls als ein Kreis der Schar anzusehen.

22) $y - \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}} = f\left(x + \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$, wo f eine beliebig gegebene Funktion bedeutet.

Lös.: Setzt man

$$1)\ y - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = C,\quad 2)\ f\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = C_1,$$

so findet man durch Differentiation, daß die beiden Gleichungen zu der nämlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

3) $\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\right]^3 + \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ führen. Sonach können dieselben als erste Integrale der Differentialgleichung 3) angesehen werden. Um das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung zu erhalten, hat man nur aus den Gleichungen 1) und 2) die Größe p zu eliminieren. Die Gleichung 2) liefert

$$f\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = C_1 \text{ oder } x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = C_2, \text{ und hieraus}$$

$$p = \frac{C_2 - x}{\sqrt{1-(C_2-x)^2}}.$$

Substituiert man diesen Wert in die Gleichung 1), so kommt $y-\sqrt{1-(C_2-x)^2}=C$. Nun ist zufolge der gegebenen Differentialgleichung $C=f(C_2)$; daher ergibt sich schließlich

$$[y-f(C_2)]^2+(C_2-x)^2=1.$$

23) Aufg. Man bestimme nach der in der vorhergehenden Nummer angegebenen Methode das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y\sqrt{1+p^2}=f(x+py),$$

wo f eine beliebig gegebene Funktion bedeutet.

Lös.: $y^2+(C_2-x)^2=[f(C_2)]^2$.

24) $Axyp^2+(x^2-Ay^2-B)p-xy=0$.

Lös.: Durch die Substitutionen $x^2=\xi$; $y^2=\eta$, $\frac{d\eta}{d\xi}=p'$, $p=p'\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$ geht die gegebene Differentialgleichung über in die folgende

$$A\xi p'^2+(\xi-A\eta-B)p'-\eta=0 \text{ oder } \eta=\xi p'-\frac{Bp'}{1+Ap'}.$$

Differentiiert man diese Gleichung, so folgt

$$\frac{dp'}{d\xi}\left[\xi-\frac{B}{(1+Ap')^2}\right]=0.$$

Diese letztere Gleichung zerfällt in die beiden anderen

$$\frac{dp'}{d\xi}=0 \text{ und } \xi-\frac{B}{(1+Ap')^2}=0.$$

Die erstere liefert das allgemeine Integral $\eta=c\xi-\frac{Bc}{1+Ac}$ oder $y^2-cx^2=-\frac{Bc}{1+Ac}$, die letztere die singuläre Lösung

$$\eta+\frac{B}{A}=\frac{1}{A}[2\sqrt{B}\sqrt{\xi}-\xi] \text{ oder } y^2+\frac{B}{A}=\frac{1}{A}[2x\sqrt{B}-x^2].$$

Anm. Auf die hier gegebene Differentialgleichung wird man bei der Bestimmung der Krümmungslinien einer Fläche zweiter Ordnung mit Mittelpunkt geführt.

§ 13. Der integrierende Faktor.

Einleitung. Es existiert immer eine Funktion v von x und y, so daß wenn M und N Funktionen von x und y sind, $v\,(Mdx + Ndy) = du$ ein vollständiges Differential ist. Jeder integrierende Faktor v genügt der partiellen Differentialgleichung

$$M\frac{\partial v}{\partial y} - N\frac{\partial v}{dx} + v\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0.$$

Wenn es einen integrierenden Faktor gibt, welcher nur von x oder nur von y abhängt, so wird für denselben diese Differentialgleichung zu einer gewöhnlichen, deren Koeffizienten entweder nur x oder nur y enthalten, und kann dann dazu dienen, den betreffenden integrierenden Faktor zu bestimmen.

Für den Fall, daß das allgemeine Integral $f\,(x, y; C) = 0$ der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ bekannt ist, kann ein integrierender Faktor auf folgende Weise bestimmt werden: Aus $f\,(x, y; C) = 0$ ergebe sich $C = \varphi\,(x, y)$ und durch Differentiation $0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy$. Diese Differentialgleichung kann sich von der gegebenen nur durch einen integrierenden Faktor unterscheiden. Es ist daher

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : M.$$

Wenn $\int v\,(Mdx + Ndy) = u$ ist und mit $\Phi\,(u)$ eine beliebige Funktion von u bezeichnet wird, so ist $v\Phi\,(u)$ ebenfalls ein integrierender Faktor der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$; umgekehrt ist der Quotient aus zwei verschiedenen integrierenden Faktoren V und v (wenn man von dem Falle absieht, in welchem sich V und v nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden) eine Funktion von u. Daher ergibt der gleich einer Konstanten gesetzte Quotient $\frac{V}{v} = \text{Const.}$ die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung.

Beispiele.

1) Aufg. Gegeben ist die Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$, wo M und N beliebige Funktionen von x und y bedeuten. Unter welchen Bedingungen existiert für dieselbe ein integrierender Faktor, der eine Funktion α) nur von x, β) nur von y, γ) von $(x^2 + y^2)$, δ) von xy ist?

Lös.: α) Sei $\varphi(x)$ ein integrierender Faktor, der nur von x abhängt; dann ist $\varphi(x)\,Mdx + \varphi(x)\,Ndy$ ein vollständiges Differential, d. h. dieser zweigliedrige Differentialausdruck genügt der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x)M] = \frac{\partial}{\partial x}[\varphi(x)N] \text{ oder } \varphi(x)\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Man hat daher zur Berechnung der Funktion φ die Gleichung

$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx.$$

Diese Gleichung kann offenbar nur dann bestehen, d. h. es ist $\varphi(x)$ nur dann ein integrierender Faktor der gegebenen Differentialgleichung, wenn der Ausdruck

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

nur von der Variablen x abhängig ist.

β) Auf ähnliche Weise, wie im vorhergehenden Falle, gelangt man zu der Gleichung

$$\frac{d\varphi(y)}{\varphi(y)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\,dy.$$

Es kann daher $\varphi(y)$ nur unter der Bedingung ein integrierender Faktor der gegebenen Differentialgleichung sein, daß der Ausdruck

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

nur von y abhängt.

γ) $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}$ muß eine Funktion nur von $(x^2 + y^2)$ sein.

δ) $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny}$ muß allein von dem Produkt xy abhängig sein.

2) Aufg. Man zeige die Richtigkeit des Satzes: Der Ausdruck $\dfrac{1}{Mx + Ny}$ ist ein integrierender Faktor der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$, wenn entweder $Mx - Ny$ identisch verschwindet oder M und N homogene Funktionen von x und y sind; ebenso ist der Ausdruck $\dfrac{1}{Mx - Ny}$ ein integrierender Faktor der genannten Differentialgleichung, wenn entweder $Mx + Ny$ identisch verschwindet, oder $\dfrac{Mx}{Ny}$ eine Funktion von dem Produkt xy ist.

Anl. Man hat identisch

$$Mdx + Ndy = \tfrac{1}{2}(Mx + Ny)\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + \tfrac{1}{2}(Mx - Ny)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)$$

oder $Mdx + Ndy = \tfrac{1}{2}(Mx + Ny)\,dl\,(xy) + \tfrac{1}{2}(Mx - Ny)\,dl\,\dfrac{x}{y}$.

Hiernach ist, wenn beispielsweise $Mx - Ny = 0$ vorausgesetzt wird, $\dfrac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \tfrac{1}{2}\,dl\,(xy)$ ein vollständiges Differential und daher $\dfrac{1}{Mx + Ny}$ ein integrierender Faktor der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$. Ebenso einfach läßt sich die Richtigkeit der übrigen, in obigem Satze ausgesprochenen Behauptungen dartun.

Anm. Zur Übung möge auch durch Differentiation bewiesen werden, daß unter den im Satze angegebenen Bedingungen die Ausdrücke $\dfrac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}$ und $\dfrac{Mdx + Ndy}{Mx - Ny}$ der Integrabilitätsbedingung genügen.

3) Aufg. Man weiß, daß für die lineare Differentialgleichung $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$, wo P und Q Funktionen von x bezeichnen, $e^{\int P dx}$ ein integrierender Faktor ist. Es soll ein integrierender Faktor für die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

abgeleitet werden.

Lös.: Setzt man $\frac{1}{y^{n-1}} = z$, so geht die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \text{ über in}$$

$$\frac{dz}{dx} - (n-1) Pz = -(n-1) Q.$$

(Vgl. § 9, Aufg. 17).)

Ein integrierender Faktor dieser linearen Differentialgleichung ist $e^{-(n-1)\int P dx}$; der entsprechende integrierende Faktor der gegebenen Differentialgleichung wird demnach $\frac{e^{-(n-1)\int P dx}}{y^n}$.

4) Aufg. Gegeben sind die Differentialgleichungen

α) $(x^2y + y + 1)\,dx + (x + x^3)\,dy = 0.$

β) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0.$

Man integriere dieselben mit Hilfe von integrierenden Faktoren, die nur von x abhängen. (Bei dieser und den folgenden Aufgaben vergleiche man Aufg. 1.)

Lös.: α) Integrierender Faktor: $\frac{1}{1+x^2}$;

allgemeines Integral: $xy + \operatorname{arctang} x = C.$

β) Integrierender Faktor: e^x;

allgemeines Integral: $(x^2 + y^2)\,e^x = C.$

5) Aufg. Man bestimme die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen mit Hilfe von integrierenden Faktoren, die Funktionen nur von y sind.

α) $y\,dx - (y + x)\,dy = 0,$

β) $2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0,$

γ) $y^2(x - y)\,dx + (1 - y^2x)\,dy = 0.$

Lös.: α) Integrierender Faktor: $\frac{1}{y^2}$;

allgem. Lösung $\frac{x}{y} - ly = C.$

β) Integrierender Faktor: $\frac{1}{y^4}$;

allgem. Lösung $x^2 - y^2 = Cy^3.$

γ) Integrierender Faktor: $\frac{1}{y^2}$;

allgem. Lös. $\frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{y} = C$.

6) Aufg. Es soll geprüft werden, ob die Differentialgleichung

$$(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$$

integrierende Faktoren besitzt, die entweder nur von $(x + y)$ oder nur von xy abhängen.

Lös.: Integrierende Faktoren: $\frac{1}{(x+y)^2}$, $\frac{1}{(1-xy)^2}$. Da der Quotient dieser beiden Faktoren nicht konstant ist, so liefert er, gleich einer Konstanten gesetzt, die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung:

$$\frac{(1-xy)^2}{(x+y)^2} = C \text{ oder } \frac{1-xy}{x+y} = C_1.$$

7) Aufg. Man integriere die Differentialgleichung

$$(y + xy^2)\,dx + (x - x^2y)\,dy = 0$$

mittels eines integrierenden Faktors, der eine Funktion von xy ist.

Lös.: Integrierender Faktor:

$$\frac{1}{x^2y^2};\ \text{allgem. Lösung } l\frac{x}{y} - \frac{1}{xy} = C.$$

8) Aufg. Die Differentialgleichungen

α) $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$,

β) $(a\sqrt{x^2 + y^2} - cx)\,dx + (b\sqrt{x^2 + y^2} - cy)\,dy = 0$

besitzen integrierende Faktoren, die von $(x^2 + y^2)$ abhängen. Man bestimme dieselben und integriere mit deren Hilfe die gegebenen Differentialgleichungen.

Lös.: α) Integrierender Faktor: $\frac{1}{x^2 + y^2}$;

allgemeines Integral: $l\sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arctang}\frac{x}{y} = C$.

β) Integrierender Faktor: $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

allgemeines Integral: $ax + by - c\sqrt{x^2 + y^2} = C$.

9) Aufg. Es sollen die homogenen Differentialgleichungen

α) $\left(3x \sin\frac{y}{x} + y\cos\frac{y}{x}\right)dx - x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$,

β) $y^2dx - (xy + x^2)\,dy = 0,$

γ) $(3x - y)\,dx + (x + 4y)\,dy = 0$

mit Hilfe von integrierenden Faktoren integriert werden. (Vgl. Aufg. 2).)

Lös.: α) Integrierender Faktor: $\dfrac{1}{3x^2 \sin \frac{y}{x}}$;

allgemeine Lösung: $x^3 = C \sin \dfrac{y}{x}$.

β) Integrierender Faktor: $\dfrac{1}{x^2 y}$;

allgemeine Lösung: $y = Ce^{-\frac{y}{x}}$.

γ) Integrierender Faktor: $\dfrac{1}{3x^2 + 4y^2}$;

allgemeine Lösung:

$$l\sqrt{3x^2 + 4y^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctang} \frac{2y}{x\sqrt{3}} = C.$$

10) Aufg. Man bestimme integrierende Faktoren der Differentialgleichungen (vgl. Aufg. 2))

α) $(x^2y^2 + xy)\,y\,dx + (x^2y^2 - 1)\,x\,dy = 0,$

β) $y\,(1 - x^2y^2)\,dx + x\,(1 + x^2y^2)\,dy = 0$

und integriere mit Hilfe derselben.

Lös.: α) In diesem Falle ist $\dfrac{Mx}{Ny}$ eine Funktion von xy, $\dfrac{1}{Mx - Ny} = \dfrac{1}{xy\,(xy + 1)}$ daher ein integrierender Faktor. Das allgemeine Integral wird $ly = xy + C$.

β) Integrierender Faktor: $\dfrac{1}{Mx - Ny} = -\dfrac{1}{2x^3y^3}$;

allgemeines Integral: $l\dfrac{x}{y} + \frac{1}{2}\dfrac{1}{x^2y^2} + C = 0.$

11) Aufg. Es soll für die beiden Seiten der Differentialgleichung

$$ay\,dx + bx\,dy = x^m y^n (a'y\,dx + b'x\,dy)$$

ein gemeinschaftlicher integrierender Faktor bestimmt und auf diese Weise ein integrierender Faktor der vorgelegten Differentialgleichung erhalten werden.

Lös.: Ein integrierender Faktor von $ay\,dx + bx\,dy = 0$ ist $\frac{1}{xy}$. Da das Integral von $a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} = 0$, $u = x^a y^b$ ist, so sind sämtliche integrierende Faktoren von $ay\,dx + bx\,dy = 0$ enthalten in der Form $\frac{\varphi(x^a y^b)}{xy}$, wo φ eine beliebige Funktion bedeutet. Auf analoge Weise findet man, daß die integrierenden Faktoren von $x^m y^n (a'y\,dx + b'x\,dy) = 0$ von der Form $\frac{\psi(x^{a'} y^{b'})}{x^{m+1} y^{n+1}}$ sind. Nun soll $\frac{\varphi(x^a y^b)}{xy} = \frac{\psi(x^{a'} y^{b'})}{x^{m+1} y^{n+1}}$ oder $x^m y^n \varphi(x^a y^b) = \psi(x^{a'} y^{b'})$ sein. Setzt man $\varphi(x^a y^b) = (x^a y^b)^\mu$ und $\psi(x^{a'} y^{b'}) = (x^{a'} y^{b'})^\nu$, so muß demnach

$$x^m y^n (x^a y^b)^\mu = (x^{a'} y^{b'})^\nu$$

sein. Zur Bestimmung der Konstanten μ und ν ergeben sich die Gleichungen

$$a\mu + m = a'\nu,$$
$$b\mu + n = b'\nu,$$

aus denen $\mu = \frac{a'n - b'm}{ab' - a'b}$, $\nu = \frac{an - bm}{ab' - a'b}$ folgt. Der verlangte integrierende Faktor lautet hiernach $x^{a\mu - 1} y^{b\mu - 1}$ oder

$$x^{a'\nu - m - 1} y^{b'\nu - n - 1}.$$

Beispiel. $ydx - \frac{10}{3} xdy = x^3 y^2 (\frac{5}{3} ydx - \frac{14}{9} xdy)$.

Integrierender Faktor: $xy^{-\frac{23}{3}}$;

allgemeines Integral: $\frac{1}{2} x^2 y^{-\frac{20}{3}} = \frac{1}{3} x^5 y^{-\frac{14}{3}} + C$.

Kapitel III.

Differentialgleichungen höherer Ordnung.

§ 14. Differentialgleichungen von der Form $\frac{d^m y}{dx^m} = f(x)$.

Einleitung. Wenn die gegebene Differentialgleichung von der Form ist

$$\frac{d^m y}{d x^m} = f(x),$$

so wird $y = \overbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \int_a^x dx \ldots \int_a^x}^{m} f(x)\, dx + c_1 (x-a)^{m-1} + $

$$+ c_2 (x-a)^{m-2} + \ldots c_{m-1}(x-a) + c_m,$$

wobei a eine beliebige konstante Größe ist. Das m-fach wiederholte Integral kann berechnet werden nach der Formel:

$$\overbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \int_a^x dx \ldots \int_a^x}^{m} f(x)\, dx = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x-z)^{m-1} f(z)\, dz.$$

Beispiele.

1) $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{a}{[\sqrt{2ax - x^2}]^3}$;

Lös.: $y = \frac{1}{a} \sqrt{2ax - x^2} + Cx + C_1$.

2) $\frac{d^3y}{dx^3} = x \sin x$;

Lös.: $y = x \cos x - 3 \sin x + Cx^2 + C_1 x + C_2$.

3) $\frac{d^2y}{dx^2} = x - \cos x$;

Lös.: $y = \cos x + \frac{1}{6}x^3 + Cx + C_1$.

4) $\frac{d^4y}{dx^4} = x^3 e^x$;

Lös.: $y = e^x [x^3 - 12x^2 + 60x - 120] + Cx^3 + C_1 x^2 + + C_2 x + C_3$.

§ 15. Differentialgleichungen von der Form $f\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = 0$.

Einleitung. Besteht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ableitungen eine Gleichung

$$f\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = 0,$$

so folgt, indem $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = p$ gesetzt wird, $f\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0$, woraus

$$\frac{dp}{dx} = \varphi(p), \quad dx = \frac{dp}{\varphi(p)}, \quad x + C_1 = \int \frac{dp}{\varphi(p)}.$$

Wenn diese Integration ausgeführt und die resultierende Gleichung nach p aufgelöst werden kann, so ergibt sich eine Differentialgleichung $p = \psi(x, c_1)$, wie sie in § 14 behandelt worden.

Kann die vorgelegte Gleichung leichter nach p, als nach $\frac{dp}{dx}$ aufgelöst werden, so sei etwa $p = \vartheta\left(\frac{dp}{dx}\right) = \vartheta(q)$. Hieraus folgt durch Differentiation

$$q = \vartheta'(q)\frac{dq}{dx}, \text{ also } dx = \vartheta'(q)\frac{dq}{q},$$

$$x + C_1 = \int \frac{\vartheta'(q)\, dq}{q}.$$

Läßt sich aus dieser und der Gleichung $p = \vartheta(q)$ mittels Elimi-

nation von q die Größe p als Funktion von x bestimmen, so ist nachher die in § 14 angegebene Methode anwendbar.

Beispiele.

1. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 5\frac{dy}{dx} - 6 = 0.$

Lös.: 1. Mittels Auflösung nach $\frac{d^2y}{dx^2}$. Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, so ist $\frac{dp}{dx} = \sqrt{5p-6}$, $x - x_0 = \int\frac{dp}{\sqrt{5p-6}} = \frac{2}{5}\sqrt{5p-6}$; hieraus folgt $p = \frac{5}{4}(x-x_0)^2 + \frac{6}{5}$, $y = \frac{5}{12}(x-x_0)^3 + \frac{6}{5}x + C$.

2. Mittels Auflösung nach $\frac{dy}{dx}$. Wird wieder $\frac{dy}{dx} = p$ und überdies $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ gesetzt, so ergibt sich $p = \frac{1}{5}q^2 + \frac{6}{5}$, $q = \frac{2}{5}q\frac{dq}{dx}$, $\frac{5}{2} = \frac{dq}{dx}$, $\frac{5}{2}dx = dq$, $q = \frac{5}{2}(x-x_0)$, $p = \frac{5}{4}(x-x_0)^2 + \frac{6}{5}$,
$y = \frac{5}{12}(x-x_0)^3 + \frac{6}{5}x + C$.

2) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} + 3 = 0;$

Lös.: $\begin{cases} x - x_0 = \frac{1}{2}lq + \frac{3}{4q^2}, \\ y - y_0 = \frac{1}{4}q + \frac{3}{4q^3}, \end{cases}$ wo $q = \frac{d^2y}{dx^2}$.

3) Aufg. Eine Kurve zu finden, deren Krümmungsradien die konstante Länge r haben.

Lös.: Differentialgleichung: $\frac{\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = r$ oder

$\frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{q} = r.$ Hieraus folgt $q = \frac{dp}{dx} = \frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{r}$,

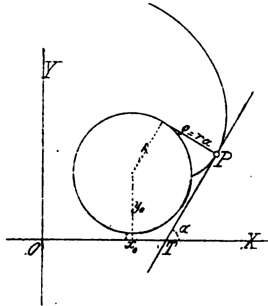
$$dx = r\frac{dp}{[\sqrt{1+p^2}]^3}.$$

Setzt man $p = \operatorname{tang}\alpha$, $dp = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$, so wird $dx = r\cos\alpha\, d\alpha$,

$$x - x_0 = r \sin \alpha, \quad dy = pdx = r \operatorname{tang} \alpha \cos \alpha \, d\alpha = r \sin \alpha \, d\alpha,$$
$$y - y_0 = - r \cos \alpha \quad \text{und} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Die gesuchte Kurve ist somit ein Kreis.

4) Aufg. Es soll eine Kurve gefunden werden, für welche in jedem ihrer Punkte der Krümmungsradius ϱ dem Winkel α proportional ist, den die entsprechende Tangente mit der X-Achse einschließt.



Lös.: Die Beziehung $\varrho = r\alpha$, wo r eine konstante Länge bezeichnet, führt zu der Differentialgleichung

$$\frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{q} = r \operatorname{arctang} p.$$

Löst man dieselbe nach q auf, so folgt

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{r \operatorname{arctang} p}, \quad dx = \frac{r \operatorname{arctang} p}{[\sqrt{1+p^2}]^3} dp \text{ oder,}$$

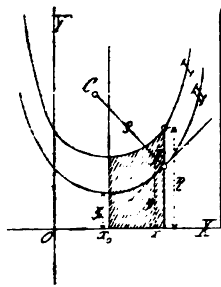
indem man $p = \operatorname{tang} \alpha$ setzt,

$$dx = r\alpha \cos \alpha \, d\alpha, \quad x - x_0 = r(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha),$$
$$dy = pdx = r \operatorname{tang} \alpha \cdot \alpha \cos \alpha \, d\alpha = r\alpha \sin \alpha \, d\alpha,$$
$$y - y_0 = r(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha).$$

Die verlangte Kurve ist demnach eine Kreisvolvente. (Vgl. Bd. I, pag. 210.)

5) Aufg. Zwei Kurven stehen in der Beziehung zueinander, daß die Ordinate eines beliebigen Punktes der ersteren genau die Länge des Krümmungsradius in demjenigen Punkte der zweiten liefert, der dieselbe Abszisse x besitzt. Ferner soll die von $x = x_0$ bis $x = x$ gerechnete Fläche der ersteren gleich der zwischen denselben Parallelen zur Y-Achse gelegenen Fläche

sein, die durch die zweite Kurve und die um die Längeneinheit vertikal verschobene Parallelkurve derselben begrenzt wird. Man finde die Gleichungen der beiden Kurven.



Lös.: Bezeichnet man die Koordinaten eines beliebigen Punktes der zweiten Kurve mit x, y, die Koordinaten des entsprechenden Punktes der ersten Kurve mit x, η und ist $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, so bestehen die Gleichungen

$$1^a)\ \frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{q} = \eta, \quad 1^b)\ \int_{x_0}^{x} \eta dx = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+p^2}\, dx;$$

woraus durch Differentiation folgt

$$2)\ \frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{q} = \sqrt{1+p^2} \text{ oder } 1+p^2 = q.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ergibt für die Gleichung der zweiten Kurve $y - y_0 = -l\cos(x - C)$. Demnach lautet die Gleichung der ersten Kurve $\eta = \frac{1}{\cos(x - C)}$. Hierbei ist zufolge der Gleichung 1^b) $C = x_0$ zu setzen, während y_0 beliebig angenommen werden kann.

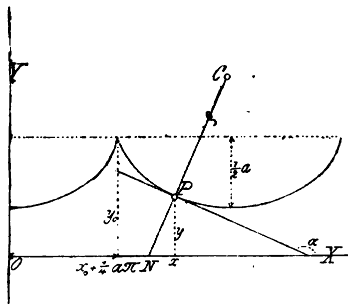
$$6)\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{dy}{dx};$$

Lös.: $y - y_0 = ae^{\frac{x-x_0}{a}}$. (Logarithm. Linie.)

$$7)\ a\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1;$$

Lös.: $y - y_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{(x - x_0)^3}$. (Neilsche Parabel.)

8) Aufg. Eine Kurve zu finden, für welche in jedem ihrer Punkte die Ordinate sich zur Normale verhält, wie der Krümmungsradius zu einer Linie von der gegebenen Länge a.



Lös.: Da $N = y\sqrt{1+p^2}$, $\varrho = \frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{q}$, so hat man die Differentialgleichung

$$\frac{y}{y\sqrt{1+p^2}} = \frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{aq} \text{ oder } q = \frac{1}{a}(1+p^2)^2,$$

$$dx = a\frac{dp}{(1+p^2)^2}.$$

Wird zum Zwecke der Integration $p = \operatorname{tang}\alpha$ gesetzt, so folgt

$$dx = a\cos^2\alpha\, d\alpha, \text{ also } x - x_0 = a(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha),$$

$$dy = pdx = a\operatorname{tang}\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha = a\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha,$$

$$y - y_0 = -\tfrac{1}{4}a(1+\cos 2\alpha).$$

Für $2\alpha = \varphi + \pi$ gehen die gefundenen Gleichungen über in

$$\begin{cases} x - x_0 - \frac{1}{4}a\pi = \frac{1}{4}a(\varphi - \sin\varphi), \\ y - y_0 = -\frac{1}{4}a(1-\cos\varphi). \end{cases}$$

Mithin ist die verlangte Kurve eine Zykloide.

9) Bei welcher Kurve verhält sich das Quadrat der Normale in einem Kurvenpunkte zu dem Quadrat der zugehörigen Ordinate wie der zugehörige Krümmungsradius zu einer gegebenen konstanten Strecke a?

Lös.: Aus der Gleichung

$$N^2 : y^2 = \varrho : a$$

ergibt sich die Differentialgleichung

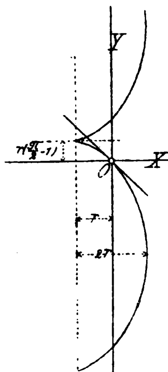
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}.$$

Sie hat das allgemeine Integral

$$y = \frac{a}{2}\left[Ce^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{C}e^{-\frac{x}{a}}\right] + C'.$$

10) Aufg. Welche Kurve hat die Eigenschaft, daß in jedem Punkte derselben sich der Krümmungsradius zu einer konstanten Strecke $4r$ verhält wie der Sinus desjenigen Winkels, den die entsprechende Tangente mit der Abszissenachse einschließt, zu 1?

Die Kurve geht durch den Koordinatenanfangspunkt, und die in diesem Punkte konstruierte Tangente ist gegen die Abszissenachse unter -45^0 geneigt. Es soll die Kurve für diese Angaben bestimmt werden.



Lös.: Da $\varrho = \frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{q}$ und $\sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, so hat man die Proportion

$$\frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{q} : 4r = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} : 1$$

oder die Differentialgleichung

$$(1+p^2)^2 = 4rp\frac{dp}{dx},\quad dx = \frac{4rp\,dp}{(1+p^2)^2}.$$

Setzt man noch $p = \operatorname{tang}\alpha$, wodurch

$$dx = 4r\cos^2\alpha \operatorname{tang}\alpha\, d\alpha = 4r\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha$$

wird, so folgt durch Integration

$$x - x_0 = -2r\cos^2\alpha,$$

$$dy = p\,dx = 4r \operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \alpha\, d\alpha = 4r \sin^2 \alpha\, d\alpha,$$
$$y - y_0 = 4r\,[\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha].$$

Die Anfangsbedingung, wonach im Koordinatenanfangspunkt $\operatorname{tang}\alpha = -1$, d. h. $\alpha = -\frac{1}{4}\pi$ werden soll, liefert $-x_0 = -r$, $-y_0 = 4r\,(-\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4})$, woraus

$$x_0 = r,\quad y_0 = \tfrac{1}{2}r\pi - r.$$

Daher wird $x = -r\cos 2\alpha$,

$$y + r - \tfrac{1}{2}r\pi = r\,(2\alpha - \sin 2\alpha) \quad \text{oder}$$
$$\begin{cases} x + r = r\,(1 - \cos 2\alpha), \\ y + r - \tfrac{1}{2}r\pi = r\,(2\alpha - \sin 2\alpha). \end{cases}$$

Hiernach ist die verlangte Kurve eine gewöhnliche Zykloide, entstanden durch das Rollen eines Kreises vom Radius r längs der Geraden $x = -r$.

§ 16. Differentialgleichungen von der Form $f\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}}\right) = 0.$

Einleitung. Die Differentialgleichung

$$f\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}}\right) = 0$$

geht durch die Substitution $\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = p$ in die einfachere $f\left(\frac{d^2p}{dx^2}, p\right) = 0$ über. Diese letztere, welche nach $\frac{d^2p}{dx^2}$ aufgelöst, $\frac{d^2p}{dx^2} = \varphi(p)$ ergebe, wird auf folgende Weise integriert:

$$\frac{d^2p}{dx^2} = \varphi(p),\quad 2\frac{dp}{dx}\frac{d^2p}{dx^2}dx = d\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2\varphi(p)\,dp, \quad \text{woraus}$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2\int \varphi(p)\,dp + C_1,\quad x = \int \frac{dp}{\sqrt{2\int \varphi(p)\,dp + C_1}} + C_2.$$

Wenn die hier nötig werdende Quadratur, sowie die nachherige Auflösung nach p möglich ist, so bleibt noch die Methode des § 14 anzuwenden.

Beispiele.

1) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{ay}}$.

Lös.: 1) $2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx = \frac{2\,dy}{\sqrt{ay}}$.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \int\frac{2\,dy}{\sqrt{ay}} = \frac{4}{a}\sqrt{ay} + C,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{4}{a}\sqrt{ay} + C},$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{4}{a}\sqrt{ay} + C}};$$

$$x - x_0 = \frac{a}{6}\sqrt{4\sqrt{\frac{y}{a}} + C}\left[2\sqrt{\frac{y}{a}} - C\right].$$

2) $p^2 = \frac{4}{a}\sqrt{ay} + C,$

$$y = \frac{a}{16}(p^2 - C)^2,$$

$$dx = \frac{dy}{p} = \tfrac{1}{4}a(p^2 - C)\,dp,$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{12}ap(p^2 - 3C).$$

Ersetzt man in der letzten Gleichung die Größe p durch ihren Wert $p = \sqrt{\frac{4}{a}\sqrt{ay} + C}$, so gelangt man zu dem nach der ersten Methode bereits gefundenen Resultate.

2) $a^2\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Lös.: Setzt man $\frac{d^2y}{dx^2} = p$, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in $\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{1}{a^2}p$. Das Integral dieser letzteren Differentialgleichung ist $p = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}a\left[C_1e^{\frac{x}{a}} + C_2e^{-\frac{x}{a}}\right]$. Durch weitere Integration findet sich hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} a^2 [C_1 e^{\frac{x}{a}} - C_2 e^{-\frac{x}{a}}] + C_3,$$

$$y = \tfrac{1}{2} a^3 [C_1 e^{\frac{x}{a}} + C_2 e^{-\frac{x}{a}}] + C_3 x + C_4.$$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = 0.$

Lös.: $y = C \sin a\,(x - x_0)$ oder mit Änderung der Konstanten

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

4) Aufg. Eine Kurve genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{3}{2} y^2.$$

und berührt die X-Achse (asymptotisch). Wie lautet die Gleichung derselben?

Lös.: $yx^2 = 4.$

5) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2};$

Lös.: $x - x_0 = \frac{1}{C} \sqrt{Cy^2 + 2ay} -$

$$- \frac{a}{C\sqrt{C}}\, l \left[y\sqrt{C} + \frac{a}{\sqrt{C}} + \sqrt{Cy^2 + 2ay}\right].$$

Wird verlangt, daß für $y = \infty$, $p = \frac{dy}{dx} = 0$ sei, so ergibt sich $C = 0$. In diesem Falle wird die gefundene Gleichung unbrauchbar. Es tritt an ihre Stelle die folgende

$$y^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2} \sqrt{2a}\,(x - x_0). \quad \text{(Neilsche Parabel.)}$$

6) Aufg. Eine Kurve hat die Eigenschaft, daß in jedem Punkte sich der Krümmungsradius zur Normale verhält, wie das Quadrat der Normale zu einem gegebenen Quadrate mit der Seite a. Es soll die Gleichung der Kurve gefunden werden.

Lös.: Differentialgleichung:

$$\frac{[\sqrt{1 + p^2}]^3}{q} = \frac{y^3 [\sqrt{1 + p^2}]^3}{a^2} \quad \text{oder } q = \frac{a^2}{y^3}.$$

Allgemeines Integral: $Cy^2 - C^2 (x - x_0)^2 = a^2.$

Es ist dies die Gleichung eines Kegelschnittes mit Mittelpunkt.

Wird die Bedingung gestellt, daß für $y = \infty$, $p = 0$ sei, so

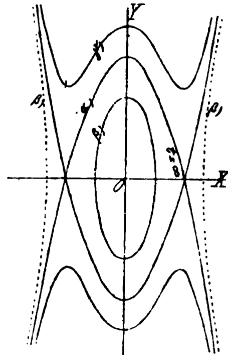
ergibt sich $C = 0$. Da die Annahme $C = 0$ in der gefundenen Formel auf einen Widerspruch führt, so muß dieser Fall besonders behandelt werden. Aus der Gleichung $q = \frac{a^2}{y^3}$ folgt durch Integration $p^2 = -\frac{a^2}{y^2}$. (Const. = 0.)

Soll daher die Lösung der gestellten Aufgabe eine reelle Kurve ergeben, so muß $a^2 = -\alpha^2$ negativ sein. Unter dieser Voraussetzung gelangt man zu der Parabel $y^2 = 2\alpha(x - x_0)$.

7) Aufg. Ein Punkt bewegt sich auf einer geraden Linie nach dem Gesetz

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x + 2x^3,$$

wo t die Zeit und x den in der Zeit t zurückgelegten Weg bedeutet. Hierbei soll zu Anfang der Bewegung die Geschwindigkeit α) $= 4$, β) $= \sqrt{7}$, γ) $= 5$ sein. Man diskutiere diese Bewegung in jedem der drei Fälle mit Hilfe der zugehörigen Geschwindigkeitskurven.



Anl. Die einmalige Integration der vorgelegten Differentialgleichung liefert $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -8x^2 + x^4 + C$. Setzt man $\frac{dx}{dt} = y$ und bestimmt die Konstante C den gegebenen Anfangsbedingungen gemäß, so findet man als Gleichungen der Geschwindigkeitskurven

$$\alpha)\ y = 4 - x^2,\quad \beta)\ y = \sqrt{(x^2 - 1)(x^2 - 7)},$$
$$\gamma)\ y = \sqrt{x^4 - 8x^2 + 25}.$$

Für die Zeit t, welche zur Zurücklegung des Weges x erforderlich ist, ergibt sich

$$\alpha)\ t = \tfrac{1}{4} l \frac{2+x}{2-x},\quad \beta)\ t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x^2-7)}} = \frac{1}{\sqrt{7}} F(x)\ (k^2 = \tfrac{1}{7}),$$

$$\gamma)\ t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 8x^2 + 25}}.$$

Diese sechs Gleichungen lassen die Bewegungen vollständig erkennen; die Untersuchung wird jedoch durch die geometrische Darstellung der Geschwindigkeitskurven wesentlich erleichtert.

§ 17. Differentialgleichungen von der Form $f(x;\, y^{(r+1)},\, y^{(r+2)} \ldots y^{(n)}) = 0$.

Einleitung. Wenn die gegebene Differentialgleichung

$$F(x;\, y^{(r+1)},\, y^{(r+2)},\, \ldots\, y^{(n)}) = 0$$

die Funktion y und deren r $(r < n)$ erste Ableitungen nicht enthält, so setze man $y^{(r+1)} = z$, wodurch man zu einer Differentialgleichung $F(x, z, z', \ldots z^{(n-r-1)}) = 0$ gelangt, welche nur noch von der $(n-r-1)$ten Ordnung ist.

Beispiele.

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} = 0$; Lös.: $y = Clx + C_1$.

2) $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$;

Lös.: $y = -\dfrac{x}{C} + \dfrac{1+C^2}{C^2}\, l(1+Cx) + C_1$.

3) Aufg. Man bestimme eine Kurve, für welche der Zahlenwert des Krümmungsradius ϱ in jedem Punkte gegeben ist durch die Gleichung

$$\alpha)\ \varrho = -x^2,\quad \beta)\ \varrho = [\sqrt{1+x^2}]^3.$$

Lös.: α) Differentialgleichung: $\dfrac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{\dfrac{dp}{dx}} = -x^2$;

allgemeines Integral: $y - y_0 = \displaystyle\int \frac{(Cx+1)\,dx}{\sqrt{(1-C^2)x^2 - 2Cx - 1}}$.

Wäre beispielsweise die Anfangsbedingung gestellt, daß für $x = \infty$, $p = 0$ sei, so fände sich $C = 0$, und man erhielte

$$y - y_0 = l\,(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ oder}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\left[e^{(y-y_0)} + e^{-(y-y_0)}\right] \text{ (Kettenlinie).}$$

β) Differentialgleichung: $\dfrac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{\dfrac{dp}{dx}} = [\sqrt{1+x^2}]^3$ oder

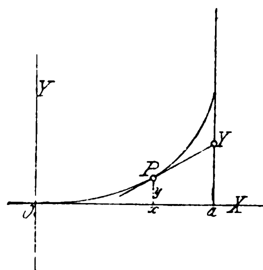
$$\frac{dp}{[\sqrt{1+p^2}]^3} = \frac{dx}{[\sqrt{1+x^2}]^3}.$$

Hieraus folgt $p = \dfrac{x + C\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1 - 2Cx\sqrt{1+x^2} - C^2(1+x^2)}}$,

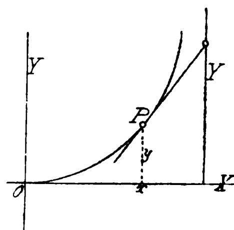
$$y - y_0 = \int \frac{(x + C\sqrt{1+x^2})\,dx}{\sqrt{1 - 2Cx\sqrt{1+x^2} - C^2(1+x^2)}}.$$

Wird z. B. verlangt, daß für $x = 0$, $p = 0$ sei, so wird $C = 0$ und $y - y_0 = \frac{1}{2}x^2$. (Parabel.)

4) Aufg. Ein Punkt bewegt sich in einer Parallelen zur Y-Achse; ein anderer verfolgt ihn vom Koordinatenanfangspunkt aus. Welche Bahn beschreibt der verfolgende Punkt, wenn seine Geschwindigkeit $n$mal so groß ist, als diejenige des verfolgten Punktes und wenn beide Punkte ihre Bewegung in der Abszissenachse beginnen? (Verfolgungskurve.)



$n = 2$



$n = 1$

Lös.: Sei $x - a = 0$ die Gleichung der gegebenen Parallelen zur Y-Achse. Wenn der verfolgte Punkt im Punkte (a, Y) angekommen ist, so möge sich der verfolgende Punkt im Punkte (x, y) seiner Bahn befinden. Bezeichnet man mit t die Zeit und mit s die Bogenlänge der Verfolgungskurve, so besteht zwischen

den Geschwindigkeiten $\frac{dY}{dt}$ und $\frac{ds}{dt}$ der beiden Punkte die Beziehung $\frac{ds}{dt} = n\frac{dY}{dt}$, woraus folgt $\int_0^s ds = nY$. Die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der Verfolgungskurve lautet $\eta - y = p(\xi - x)$. Da diese Tangente stets nach dem verfolgten Punkte (a, Y) gerichtet sein muß, so hat man die Bedingung $Y - y = p(a - x)$ oder indem man $Y = \frac{1}{n}\int_0^x \sqrt{1+p^2}\,dx$ einsetzt

$$1)\quad \frac{1}{n}\int_0^x \sqrt{1+p^2}\,dx - y = p(a-x).$$

Durch Differentiation ergibt sich hieraus

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+p^2} - p = \frac{dp}{dx}(a-x) - p \quad \text{oder}$$

$$2)\quad \frac{dp}{dx} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{n(a-x)}.$$

Integriert man einmal, so wird

$$3)\quad l(p+\sqrt{1+p^2} = -\frac{1}{n}l(a-x) + C.$$

Nun ist für $x = 0$ offenbar auch $p = 0$ und daher $C = \frac{1}{n}la$. Substituiert man diesen Wert von C in die Gleichung 3), so folgt

$$l(p+\sqrt{1+p^2}) = \frac{1}{n}l\frac{a}{a-x} \quad \text{oder}$$

$$4)\quad p = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{a-x}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a}{a-x}\right)^{-\frac{1}{n}}\right].$$

Das Integral dieser Gleichung lautet:

$$5)\quad y - y_0 = \tfrac{1}{2}n\left[\frac{(a-x)^{\frac{n+1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}(n+1)} - \frac{a^{\frac{1}{n}}(a-x)^{\frac{n-1}{n}}}{(n-1)}\right].$$

Zur Bestimmung der Konstanten y_0 kann die Bemerkung dienen, daß die gefundene Kurve durch den Koordinatenanfangspunkt gehen muß. Man findet $y_0 = \frac{an}{n^2-1}$.

Selbstverständlich können sich die beiden Punkte nur auf der Geraden $x = a$ treffen und zwar nur dann, wenn $n > 1$ ist.

Spezialfälle. 1) $n = 2$; $y = \frac{1}{3}\left[2a - (x + 2a)\sqrt{\frac{a-x}{a}}\right]$.

2) $n = 1$. In diesem Falle wird die Gleichung 5) unbrauchbar. Die Gleichung 4) geht über in $p = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{a-x} - \frac{a-x}{a}\right]$; das Integral dieser letzteren Differentialgleichung ist

$$y - y_0 = -\tfrac{1}{2} a l (a - x) + \frac{1}{4a}(a - x)^2, \text{ wo } y_0 = -\tfrac{1}{2} a (\tfrac{1}{2} - la).$$

§ 18. Differentialgleichungen von der Form $f(y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$.

Einleitung. Kommt in der gegebenen Differentialgleichung

$$F(y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

die Variable x explizite nicht vor, so kann die Differentialgleichung in eine andere übergeführt werden, deren Ordnungszahl um eine Einheit niedriger ist, indem man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt und y als unabhängige Variable wählt. Dadurch wird nämlich

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \text{ usw.}$$

Beispiele.

1) $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; Lös.: $(x - x_0)^2 + y^2 = C^2$.

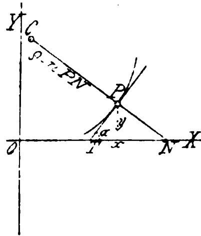
2) $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$; Lös.: $y^2 - (x - x_0)^2 = C^2$.

3) Aufg. Es sollen alle Kurven gefunden werden, für welche in jedem Punkte der Krümmungsradius n mal so groß ist, wie die zugehörige Normale.

Lös.: Differentialgleichung: $\frac{[\sqrt{1+p^2}]^3}{\frac{dp}{dx}} = ny\sqrt{1+p^2}$ oder

$$ny\frac{dp}{dx} = 1 + p^2;$$

allgemeine Lösung: $\begin{cases} y = C(1+p^2)^{\frac{n}{2}}, \\ x - x_0 = nC\int(1+p^2)^{\frac{n}{2}-1}dp. \end{cases}$



Spezialfälle. 1) $n=1$: $y=\frac{1}{2}C[e^{\frac{x-x_0}{C}}+e^{-\frac{x-x_0}{C}}]$. (Kettenlinie.)

2) $n=2$: $(x-x_0)^2=4C(y-C)$. (Parabel.)

3) $n=-1$: $(x-x_0)^2+y^2=C^2$. (Kreis.)

4) $n=-2$: $\begin{cases} y = \frac{C}{1+p^2}, \\ x - x_0 = -C\left[\frac{p}{1+p^2}+\text{arctang}\, p\right]. \end{cases}$

Substituiert man $p = \text{tang}\, \alpha$, so folgt

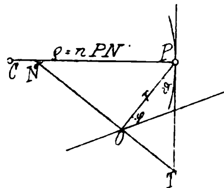
$$\begin{cases} y = C\cos^2\alpha = \frac{1}{2}C(1+\cos 2\alpha), \\ x - x_0 = -C(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha) = -\frac{1}{2}C(\sin 2\alpha + 2\alpha). \end{cases}$$

Für $2\alpha = -(\pi+\varphi)$ gehen diese Gleichungen über in

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}C(1-\cos\varphi), \\ x - x_0 - \frac{1}{2}C\pi = \frac{1}{2}C(\varphi - \sin\varphi). \end{cases}$$

Die Kurve ist somit eine gewöhnliche Zykloide.

4) Aufg. Man bestimme alle Kurven, deren Krümmungsradien n mal so groß wie die entsprechenden Polarnormalen sind.



Lös.: Da $\mathfrak{R} = \frac{r}{\sin\vartheta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$ und

$$\varrho = \frac{\left[\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\right]^3}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}},$$

so hat man die Differentialgleichung

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = n\left[r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right],$$

oder indem man $\frac{dr}{d\varphi} = p$, $\frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{dp}{d\varphi}$ setzt,

$$r^2 + p^2 = n\left(r^2 + 2p^2 - r\frac{dp}{d\varphi}\right) = n\left(r^2 + 2p^2 - rp\frac{dp}{dr}\right).$$

Diese Gleichung ist homogen in bezug auf r und p. Substituiert man daher $p = rz$, so folgt $\frac{dr}{r} = \frac{n}{n-1}\frac{z\,dz}{z^2+1}$ und hieraus durch Integration

$$l\frac{r}{C} = \frac{n}{2(n-1)}l(z^2+1), \quad r = C(1+z^2)^{\frac{n}{2(n-1)}}.$$

Nun ist $\frac{dr}{d\varphi} = p = rz$, also $d\varphi = \frac{dr}{r}\cdot\frac{1}{z} = \frac{n}{n-1}\frac{dz}{1+z^2}$ und $\varphi - \varphi_0 = \frac{n}{n-1}\operatorname{arctang} z$.

Die allgemeine Lösung der vorliegenden Differentialgleichung wird somit dargestellt durch die beiden zusammengehörigen Gleichungen

$$\begin{cases} r = C(1+z^2)^{\frac{n}{2(n-1)}} \\ \varphi - \varphi_0 = \frac{n}{n-1}\operatorname{arctang} z \end{cases}$$

oder durch die eine Gleichung $r = \frac{C}{\left[\cos\frac{n-1}{n}(\varphi-\varphi_0)\right]^{\frac{n}{n-1}}}$.

Kürzer gelangt man auf folgende Weise zu demselben Resultate: Wählt man für den Krümmungsradius die Form

$\varrho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\vartheta + d\varphi}$, wo α, φ und ϑ in der gewöhnlichen Bedeutung genommen sind, so besteht die Differentialgleichung $\frac{ds}{d\vartheta + d\varphi} = \frac{nr}{\sin\vartheta}$ oder $d\varphi = n\,(d\varphi + d\vartheta)$. Hieraus folgt unmittelbar $\varphi - \varphi_0 = \frac{n}{1-n}\vartheta = \frac{n}{1-n}\,\text{arctang}\,\frac{rd\varphi}{dr}$,

$$r\frac{d\varphi}{dr} = \text{tang}\left[\frac{1-n}{n}(\varphi - \varphi_0)\right],\quad \frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{\text{tang}\left[\frac{1-n}{n}(\varphi - \varphi_0)\right]},$$

$$l\,\frac{r}{C} = \frac{n}{1-n}\,l\sin\frac{1-n}{n}(\varphi - \varphi_0),$$

$$r = C\left[\sin\frac{1-n}{n}(\varphi - \varphi_0)\right]^{\frac{n}{1-n}},$$

oder mit Änderung der Konstanten $r = \frac{C}{\left[\cos\frac{n-1}{n}(\varphi - \varphi_0')\right]^{\frac{n}{n-1}}}$.

Spezialfälle. 1) $n = 1$. Als wahren Wert des Nenners, der für $n = 1$ die unbestimmte Form 1^∞ annimmt, findet sich die Einheit. Daher wird die Gleichung der Kurve $r = C$ und somit die Kurve selbst ein Kreis.

2) $n = -1$; $r^2\cos 2\,(\varphi - \varphi_0) = C^2$. (Gleichseitiges Hyperbel.)

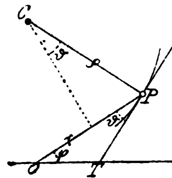
3) $n = 2$; $r = \frac{2C}{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)}$. (Parabel.)

4) $n = \frac{1}{2}$; $r = C\cos(\varphi - \varphi_0)$. (Kreis vom Radius $\frac{1}{2}C$ und durch den Pol gehend.)

5) $n = \frac{1}{3}$; $r = C\sqrt{\cos 2\,(\varphi - \varphi_0)}$. (Lemniskate.)

6) $n = \frac{2}{3}$; $r = 2C\,[1 + \cos(\varphi - \varphi_0)]$. (Kardioide.)

5) Aufg. Die Polargleichung aller Kurven zu finden, bei denen die Projektion des Krümmungsradius auf den Leitstrahl sich zum Leitstrahl verhält, wie $1 : n + 1$.



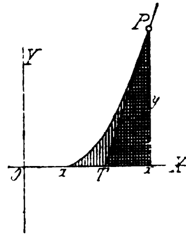
Lös.: Differentialgleichung: $\varrho \sin \vartheta : r = 1 : n + 1$ oder

$$n d\varphi = d\vartheta;$$

allgemeine Lösung: $r^n = C \sin n(\varphi - \varphi_0)$.

(Vgl. die zweite in der vorigen Nummer angedeutete Lösung.) Welche speziellen Kurven ergeben die Werte $n = 1, -2, +2$ usw.?

6) Aufg. Es soll eine Kurve gefunden werden, deren von $x = a$ bis $x = x$ gerechneter Flächeninhalt der $n$te Teil von dem Flächeninhalt des Dreiecks ist, das durch die Tangente im Punkte (x, y), die Ordinate y und die Subtangente gebildet wird.



Lös.: Die in der Aufgabe erwähnte Eigenschaft der verlangten Kurve findet ihren Ausdruck in der Gleichung:

1) $n \int_0^x y dx = \frac{1}{2} \frac{y^2}{p}$, aus welcher durch Differentiation folgt

$$ny = \frac{1}{2} \frac{2yp^2 - y^2 \frac{dp}{dx}}{p^2} \quad \text{oder} \quad 2)\ 2(n-1)\frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p}.$$

Als allgemeines Integral dieser letzteren Differentialgleichung ergibt sich

$$3)\ y = C(x - x_0)^{\frac{1}{2n-1}}.$$

Die für y gefundene Funktion genügt der Gleichung 2); damit auch die Gleichung 1) befriedigt sei, muß $x_0 = a$ sein. Die Konstante C bleibt unbestimmt.

Spezialfälle. 1) Der Fall $n = \frac{1}{2}$ verlangt eine besondere Behandlung. Die Gleichung 2) geht für $n = \frac{1}{2}$ über in $\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}$. Hieraus folgt $y = C_1 e^{Cx}$. Da sich jedoch mit Hilfe von 1) ergibt, daß $C_1 = 0$ sein muß, so reduziert sich die gefundene Gleichung auf $y = 0$; es liefert daher $n = \frac{1}{2}$ keine Lösung der gestellten Aufgabe.

2) $n = \frac{3}{4}$; $y = C(x-a)^2$. (Parabel.)

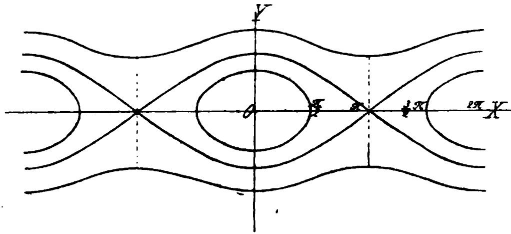
3) $n = \frac{5}{6}$; $y = C(x-a)^{\frac{3}{2}}$. (Neilsche Parabel.)

4) $n = 1$; $y = C(x-a)$. (Gerade.)

7) Aufg. Die gewöhnliche Pendelbewegung ist definiert durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin x,$$

wo x den in der Zeit t beschriebenen Zentriwinkel (ausgedrückt in Teilen des Halbmessers), g die Beschleunigung der Schwere und l die Pendellänge bedeutet. Man diskutiere die Bewegung.



Anl. Die einmalige Integration der vorgelegten Differentialgleichung ergibt $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos x + C$ oder, wenn man $C = v_0{}^2 - \frac{2g}{l}$ setzt, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v_0{}^2 - \frac{4g}{l}\sin^2\frac{1}{2}x$. Die Gleichung der Geschwindigkeitskurve wird daher

$$y = \sqrt{v_0{}^2 - \frac{4g}{l}\sin^2\tfrac{1}{2}x}.$$

Die Zeit t, in welcher das Pendel den Winkel x beschreibt, ist bestimmt durch das Integral

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0{}^2 - \frac{4g}{l}\sin^2\frac{1}{2}x}} = \frac{2}{v_0}F(x) \left(\text{wenn } \varkappa^2 = \frac{4g}{lv_0{}^2} < 1\right).$$

Die Bewegung wird eine wesentlich andere, je nachdem $v_0{}^2 \lesseqgtr \frac{4g}{l}$, d. h. je nachdem die Anfangsgeschwindigkeit $\lesseqgtr 2\sqrt{gl}$ ist.

Nimmt man an, daß der Winkel x sehr klein ist, so kann man $\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$ setzen. Dann wird die Geschwindigkeit

$y = \sqrt{v_0^2 - \frac{g}{l} x^2}$. Für die Werte $x = \pm v_0 \sqrt{\frac{l}{g}}$ wird die Geschwindigkeit $= 0$, hier kehrt also das Pendel seine Bewegungsrichtung um. Die Zeit, die verläuft, bis das Pendel, von einem Umkehrpunkte ausgehend wieder dahin zurückgelangt ist, ist

$$T = 4 \int_0^{v_0 \sqrt{\frac{l}{g}}} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{g x^2}{l}}},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Sie ist also unabhängig von der Größe des Schwingungswinkels $v_0 \sqrt{\frac{l}{g}}$ und hängt nur von der Länge des Pendels ab.

§ 19. Homogene Differentialgleichungen.

α) Wenn eine Differentialgleichung in bezug auf die Größe y und deren Ableitungen homogen ist, so führen die Substitutionen

$$y = e^{\int u dx}, \quad \frac{dy}{dx} = y \cdot u, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y \frac{du}{dx} + u^2 y, \text{ usw.}$$

zu einer Differentialgleichung, deren Ordnungszahl um eine Einheit niedriger ist, als die der gegebenen Differentialgleichung.

β) Eine in bezug auf x, y und die Differentiale dx, dy, d^2y, $\ldots d^n y$ homogene Differentialgleichung geht durch die Substitutionen

$$x = e^t, \quad y = e \cdot z, \quad dy = \left(z + \frac{dz}{dt}\right) e^t \, dt,$$

$$d^2y = \left(\frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\right) e^t \, dt^2 \text{ usw.}$$

in eine Differentialgleichung über, in welcher die Variable t explizite nicht vorkommt und welche demnach gemäß 5) eine Erniedrigung der Ordnungszahl gestattet.

γ) Wenn eine Differentialgleichung in dem Sinne homogen ist, daß man in derselben x und dx als Größen erster Ordnung, y als eine Größe μter Ordnung und dem entsprechend y', y'' usw. als Größen $(\mu - 1)$ter, $(\mu - 2)$ter usw. Ordnung betrachtet, so

ergeben die Substitutionen $x = e^t$, $y = e^{ut} z$ eine Differentialgleichung, welche t explizite nicht enthält und welche daher einer Erniedrigung der Ordnungszahl fähig ist.

Beispiele.

1) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$.

Lös.: Diese Differentialgleichung ist homogen in bezug auf die Funktion y und deren Ableitungen. Setzt man daher $y = e^{\int u dx}$, $\frac{dy}{dx} = uy$, $\frac{d^2y}{dx^2} = y\frac{du}{dx} + u^2 y$, so geht dieselbe über in eine Differentialgleichung erster Ordnung $x^2 du = (2 - x^2 u^2)\, dx$.

Zur Integration dieser letzteren kann die Substitution $xu = z$ dienen. Man erhält der Reihe nach

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z^2 - z - 2},\quad x = \sqrt[3]{C\frac{z+1}{z-2}},\quad u = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y} = \frac{C + 2x^3}{x^4 - Cx},$$

$$l\frac{y}{C_1} = \int\frac{C + 2x^3}{x^4 - Cx}\,dx,\quad y = C_1\frac{x^3 - C}{x}.$$

2) $ay\frac{d^2y}{dx^2} + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{c^2 + x^2}}$.

Lös.: Mittels der in der vorhergehenden Nummer angewandten Substitution gelangt man zu der Differentialgleichung

$$a\frac{du}{dx} - \frac{u}{\sqrt{c^2 + x^2}} = -(a + b)\,u^2.$$

Wendet man auf dieselbe das im § 9, Aufg. 17) angegebene Verfahren an und setzt noch zur Abkürzung

$$\int (x + \sqrt{c^2 + x^2})^{\frac{1}{a}}\,dx = X, \text{ so findet man}$$

$$u = \frac{a}{a+b}\,\frac{(x + \sqrt{c^2 + x^2})^{\frac{1}{a}}}{X}$$

und daher $l\frac{y}{C_1} = \frac{a}{a+b}\int\frac{(x + \sqrt{c^2 + x^2})^{\frac{1}{a}}\,dx}{X + C} =$

$$= \frac{a}{a+b} \int \frac{dX}{X+C} = \frac{a}{a+b}\, l\,(X+C).$$

Die Berechnung von $X = \int (x + \sqrt{c^2+x^2})^{\frac{1}{a}}\, dx$ wird erleichtert durch die Substitutionen

$x + \sqrt{c^2+x^2} = t^a$, $x = \frac{1}{2}(t^a - c^2 t^{-a})$, $dx = \frac{1}{2}a\,(t^{a-1} + c^2 t^{-a-1})\,dt.$
Es wird

$$X = \tfrac{1}{2}a\left[\frac{t^{a+1}}{a+1} + c^2\,\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]; \text{ folglich}$$

$$y = C_1\left[\frac{(x+\sqrt{c^2+x^2})^{\frac{a+1}{a}}}{a+1} + c^2\,\frac{(x+\sqrt{c^2+x^2})^{\frac{-a+1}{a}}}{-a+1} + C\right]^{\frac{a^2}{2(a+b)}}$$

Die Fälle $a = \pm 1$ machen eine besondere Berechnung der Größe X nötig.

3) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = 0.$

Lös.: Substitution: $y = e^{\int u dx}$, $\dfrac{dy}{dx} = uy,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\frac{du}{dx} + u^2 y;$$

allgemeine Lösung: $y = Cx + \dfrac{C_1}{x}$.

4) $nx^3 \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

Lös.: Diese Differentialgleichung ist in bezug auf die Größen x, y, dx, dy, d^2y homogen.

Setzt man dem entsprechend $x = e^t$, $y = e^t z$, $\dfrac{dy}{dx} = z + z'$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = (z' + z'')\,e^{-t}\left(\text{wo } z' = \dfrac{dz}{dt}, z'' = \dfrac{d^2z}{dt^2}\right)$, so verwandelt sie sich in die folgende: $n\,(z' + z'') = z'^2$, deren allgemeines Integral $z = \dfrac{y}{x} = nl\,\dfrac{C_1 x}{1 - Cx}$ oder $y = nx\,l\,\dfrac{C_1 x}{1 - Cx}$ ist.

5) Aufg. Eine Kurve zu finden, deren Krümmungsradien von einem gegebenen Punkte aus sämtlich unter demselben

Winkel ($= \operatorname{arctang} a$) erscheinen. (*Nouvelles Annales de Math.*, Bd. XIX, pag. 285.)

Lös.: Es werde der gegebene Punkt zum Koordinatenanfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt. Bezeichnet man die Koordinaten eines beliebigen Punktes P der gesuchten Kurve mit x, y und die Winkel, welche die nach P und dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkt gezogenen Leitstrahlen mit der Abszissenachse einschließen, beziehungsweise mit φ und ω, so muß der Aufgabe gemäß $\omega - \varphi = \text{Const.}$ sein.

Nun ist, wenn X, Y die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind,

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{Y}{X} = \frac{y + \varrho \frac{dx}{ds}}{x - \varrho \frac{dy}{ds}} = \frac{y \frac{dp}{dx} + 1 + p^2}{x \frac{dp}{dx} - p(1+p^2)}; \text{ (vgl. Bd. I, S. 172.)}$$

ferner $\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{x}$, $\operatorname{tang}(\omega - \varphi) = \frac{\operatorname{tang} \omega - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \omega \cdot \operatorname{tang} \varphi} =$

$$= \frac{(x + py)(1 + p^2)}{(x^2 + y^2)\frac{dp}{dx} + (y - px)(1 + p^2)}.$$

Man hat daher zur Bestimmung der verlangten Kurve die Differentialgleichung

$$1) \quad \frac{(x + py)(1 + p^2)}{(x^2 + y^2)\frac{dp}{dx} + (y - px)(1 + p^2)} = a.$$

Dieselbe ist in bezug auf x, y, dx, dy, d^2y homogen und gestattet daher eine ähnliche Behandlung, wie die vorhergehende Aufgabe. Wird $x = e^t$, $y = ze^t$, $p = z + z'$, $\frac{dp}{dx} = (z' + z'')\, e^{-t}$ gesetzt, so folgt

2) $\frac{[1+z(z+z')][1+(z+z')^2]}{(1+z^2)(z'+z'')-z'[1+(z+z')^2]}=a.$

Die Substitutionen $z=\operatorname{tang}\varphi$, $z+z'=\operatorname{tang}\alpha$,

$$z'+z''=\alpha'[1+(z+z')^2]=\frac{\alpha'}{\cos^2\alpha},$$

$$z'=\varphi'(1+z^2)=\frac{\varphi'}{\cos^2\varphi}=\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\varphi$$

ergeben weiter $\frac{\varphi'}{\operatorname{tang}(\alpha-\varphi)}=a(\alpha'-\varphi')$.

Sonach wird $d\varphi=a\operatorname{tang}(\alpha-\varphi)\,d(\alpha-\varphi)$,

3) $\frac{\varphi}{a}=-l[C\cos(\alpha-\varphi)]$, $e^{-\frac{\varphi}{a}}=C\cos(\alpha-\varphi)$.

Nun ist $\alpha-\varphi=\vartheta$, $\cos\vartheta=\frac{dr}{ds}=\frac{dr}{\sqrt{dr^2+(rd\varphi)^2}}$; daher

$e^{-\frac{\varphi}{a}}=\frac{C}{\sqrt{1+\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}}$ oder $\frac{dr}{r}=\frac{d\varphi}{\sqrt{C^2e^{\frac{2\varphi}{a}}-1}}$ und

4) $lC_1r=a\int\frac{d\varphi}{\sqrt{C^2e^{\frac{2\varphi}{a}}-1}}=-a\arcsin\frac{e^{-\frac{\varphi}{a}}}{C}$.

Spezialfälle. 1) $a=0$ ergibt $r=\text{Const.}$ (Kreis.)

2) $a=\infty$ in die Gleichung 3) eingesetzt, liefert

$lC\cos(\alpha-\varphi)=lC\cos\vartheta=0$, $C\cos\vartheta=1$, $\cos\vartheta=\text{Const.}$ (Logarithmische Spirale.)

6) $x^4\frac{d^2y}{dx^2}=\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^3$;

Lös.: $y=C_1x-x\arcsin\frac{C}{x}$.

7) $x^4\frac{d^2y}{dx^2}-(x^3+2xy)\frac{dy}{dx}+4y^2=0$.

Lös.: Diese Differentialgleichung wird homogen, wenn man in derselben y als eine Größe zweiter, x und dx als Größen erster Ordnung ansieht. Setzt man demgemäß

$x=e^t$, $y=e^{2t}\cdot z$, wonach $\frac{dy}{dx}=e^t(2z+z')$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2z+3z'+z''$,

so geht dieselbe über in $2z'-2zz'+z''=0$. Substituiert man

noch $z' = u$, $z'' = u\frac{du}{dz}$, so folgt $u\left(2 - 2z + \frac{du}{dz}\right) = 0$. Die Lösung $u = 0$ ergibt $y = cx^2$. Setzt man aber $2 - 2z + \frac{du}{dz} = 0$, so findet sich $u = \frac{dz}{dt} = (z-1)^2 + C$,

$t + C_1 = \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arctang} \frac{z-1}{\sqrt{C}}$, wenn C positiv ist,

$\frac{z-1}{\sqrt{C}} = \operatorname{tang} \sqrt{C}\,(t + C_1)$. Nun ist $z = \frac{y}{x^2}$, $t = lx$, also wird

$$\frac{y}{x^2} - 1 = \sqrt{C} \operatorname{tang}\left[\sqrt{C}(lx + C_1)\right] \text{ oder}$$

$$y = x^2 \left\{1 + \sqrt{C} \operatorname{tang}\left[\sqrt{C}(lx + C_1)\right]\right\}.$$

Anm. Als Übungsbeispiele für die hier angedeutete Methode können auch einige der nachfolgenden linearen Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten verwendet werden.

§ 20. Lineare Differentialgleichungen ohne zweites Glied.

Einleitung.

Erster Fall. Sämtliche Koeffizienten der gegebenen Differentialgleichung

$$\Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

seien konstante Zahlen. Durch die Substitution $y = e^{rx}$ geht $\Phi(y) = 0$ über in

$$\Phi(e^{rx}) = e^{rx}\left[r^n + Pr^{n-1} + \ldots + Tr + U\right] = 0.$$

Dieser Gleichung kann durch die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$r^n + Pr^{n-1} + \ldots + Tr + U = 0$$

genügt werden. Wenn sämtliche Wurzeln der letzteren voneinander verschieden sind, so erhält man n partikuläre Integrale $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$, ... $y_n = e^{r_n x}$, und es ergibt sich als allgemeines Integral der vorgelegten Differentialgleichung

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

Für eine m-fache Wurzel r' der charakteristischen Gleichung sind die ausfallenden $(m-1)$ partikulären Integrale zu ersetzen durch die folgenden:

$$y = x e^{r'x},\ y = x^2 e^{r'x},\ \ldots .\ y = x^{m-1} e^{r'x}.$$

Zweiter Fall. Die Differentialgleichung

$$(ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + P(ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots +$$
$$+ T(ax+b)\frac{dy}{dx} + Uy = 0,$$

wo $a, b, P, \ldots T, U$ konstante Zahlen sind, gestattet für die Annahme $y = (ax+b)^r$ eine ganz ähnliche Behandlung, wie der erste Fall. Wenn r' eine m-fache Wurzel der für r sich ergebenden Gleichung $n$ten Grades ist, so treten an die Stelle der ausfallenden partikulären Integrale die folgenden:

$$y = (ax+b)^{r'} \cdot l(ax+b),\ y = (ax+b)^{r'} \cdot l^2(ax+b),$$
$$\ldots\ y = (ax+b)^{r'} \cdot l^{m-1}(ax+b).$$

Beispiele.

1) $\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 15y = 0.$

Anfangsbedingungen: Für $x = 0$ soll $y = b,\ \frac{dy}{dx} = b',$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = b''$ werden.

Lös.: Annahme: $y = e^{rx}$, charakteristische Gleichung:

$$r^3 + r^2 - r + 15 = 0,$$

Wurzeln derselben: $r_1 = -3,\ r_2 = 1 + 2i,$
$r_3 = 1 - 2i,$

partikuläre Integrale: $y_1 = e^{-3x},\ y_2 = e^{(1+2i)x},$
$y_3 = e^{(1-2i)x}.$

Nun ist $y_2 = e^x(\cos 2x + i \sin 2x),\ y_3 = e^x(\cos 2x - i \sin 2x),$ daher $\frac{y_2 + y_3}{2} = e^x \cos 2x,\ \frac{y_2 - y_3}{2i} = e^x \sin 2x$; in reeller Form hat man sonach die partikulären Integrale

$$y_1 = e^{-3x}, \quad y_2 = e^x \cos 2x, \quad y_3 = e^x \sin 2x,$$

allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x$.

Bestimmt man, um den Anfangsbedingungen zu genügen, drei partikuläre Integrale y_1, y_2 und y_3 von der Eigenschaft, daß für

$$\begin{aligned} x = 0, \quad & y_1 = 1, \quad y_1' = 0, \quad y_1'' = 0, \\ & y_2 = 0, \quad y_2' = 1, \quad y_2'' = 0, \\ & y_3 = 0, \quad y_3' = 0, \quad y_3'' = 1, \end{aligned}$$

so lautet die allgemeine Lösung: $y = by_1 + b'y_2 + b''y_3$, wobei

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{4}e^{-3x} + \tfrac{3}{4}e^x \cos 2x, \\ y_2 &= -\tfrac{1}{10}e^{-3x} + \tfrac{1}{10}e^x \cos 2x + \tfrac{3}{10}e^x \sin 2x, \\ y_3 &= \tfrac{1}{20}e^{-3x} - \tfrac{1}{20}e^x \cos 2x + \tfrac{1}{10}e^x \sin 2x. \end{aligned}$$

2) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 7\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0.$

Anfangsbedingungen: Für $x = 0$ soll $y = b$, $\dfrac{dy}{dx} = b'$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = b''$ werden.

Lös.: Allgemeine Lösung: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$.

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen nimmt dieselbe die Form an:

$$\begin{aligned} y = (\tfrac{3}{2}b - \tfrac{1}{4}b' - \tfrac{1}{4}b'')\, e^x + (-\tfrac{3}{5}b + \tfrac{2}{5}b' + \tfrac{1}{5}b'')\, e^{2x} + \\ + (\tfrac{1}{10}b - \tfrac{3}{20}b' + \tfrac{1}{20}b'')\, e^{-3x}. \end{aligned}$$

3) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0.$

Anfangsbedingungen: Für $x = 0$ soll $y = b$, $\dfrac{dy}{dx} = b'$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = b''$ werden.

Lös.: Charakteristische Gleichung: $r^3 - 3r^2 + 4 = 0$,
Wurzeln derselben: $r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = -1$.
$r = 2$ ist eine Doppelwurzel.
Partikuläre Integrale: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$, $y_3 = e^{-x}$,
allgemeines Integral: $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x} + C_3 e^{-x}$,
oder unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$y = by_1 + b'y_2 + b''y_3, \text{ wobei}$$

$y_1 = \tfrac{1}{9}\,[(5 - 6x)\, e^{2x} + 4e^{-x}]$,

$y_2 = \frac{1}{9}[(4-3x)e^{2x} - 4e^{-x}]$,
$y_3 = \frac{1}{9}[(-1+3x)e^{2x} + e^{-x}]$.

4) $\frac{d^5y}{dx^5} + 3\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{dy}{dx} = 0$.

Lös.: Charakteristische Gleichung: $r^5 + 3r^3 - 4r = 0$,
Wurzeln derselben: $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$, $r_4 = 2i$, $r_5 = -2i$,
partikuläre Integrale: $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{-x}$, $y_4 = \sin 2x$,
$y_5 = \cos 2x$,
allgemeine Lösung: $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + C_4 \sin 2x + C_5 \cos 2x$.

5) $4\frac{d^4y}{dx^4} - 32\frac{d^3y}{dx^3} + 89\frac{d^2y}{dx^2} - 102\frac{dy}{dx} + 45y = 0$.

Lös.: $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + e^x(C_3 \sin \frac{1}{2}x + C_4 \cos \frac{1}{2}x)$.

6) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 15y = 0$.

Lös.: Annahme: $y = x^r$, charakteristische Gleichung:
$$r(r-1) + 3r - 15 = 0,$$
Wurzeln derselben: $r_1 = 3$, $r_2 = -5$,
partikuläre Integrale: $y_1 = x^3$, $y_2 = \frac{1}{x^5}$,
allgemeine Lösung: $y = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^5}$.

7) $(x-2)^3\frac{d^3y}{dx^3} - 2(x-2)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

Lös.: Annahme: $y = (x-2)^r$, charakteristische Gleichung:
$$r(r-1)(r-2) - 2r + 4 = 0,$$
Wurzeln derselben: $r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = -1$.
$r = 2$ ist eine Doppelwurzel.
Partikuläre Integrale: $y_1 = (x-2)^2$, $y_2 = (x-2)^2 l(x-2)$,
$y_3 = \frac{1}{x-2}$,
allgemeine Lösung: $y = [C_1 + C_2 l(x-2)](x-2)^2 + \frac{C_3}{x-2}$.

8) $(x+a)^4\frac{d^4y}{dx^4} - 2(x+a)^3\frac{d^3y}{dx^3} + (x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2} -$
$$- 5(x+a)\frac{dy}{dx} + 5y = 0.$$

Lös.: Annahme: $y = (x + a)^r$, charakteristische Gleichung:

$$r^4 - 8r^3 + 18r^2 - 16r + 5 = 0,$$

Wurzeln derselben: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, $r_4 = 5$,
partikuläre Integrale: $y_1 = x + a$, $y_2 = (x + a)\, l\,(x + a)$,

$$y_3 = (x + a)\,[l\,(x + a)]^2, \quad y_4 = (x + a)^5,$$

allgemeine Lösung:

$$y = [C_1 + C_2\, l\,(x + a) + C_3\, l^2\,(x + a)]\,(x + a) + C_4\,(x + a)^5.$$

9) $$(1 + x)^3 \frac{d^3y}{dx^3} + (1 + x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3\,(1 + x)\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

Lös.: Annahme: $y = (1 + x)^r$, charakteristische Gleichung:

$$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = 0,$$

Wurzeln derselben: $r_1 = 2$, $r_2 = 2i$, $r_3 = -2i$,
partikuläre Integrale: $\eta_1 = (1 + x)^2$, $\eta_2 = (1 + x)^{2i} = e^{2il(1+x)}$

$$\eta_3 = (1 + x)^{-2i} = e^{-2il(1+x)}$$

oder in reeller Form:

$$y_1 = (1 + x)^2, \quad y_2 = \cos\,[2l\,(1 + x)], \quad y_3 = \sin\,[2l\,(1 + x)],$$

allgemeine Lösung:

$$y = C_1\,(1 + x)^2 + C_2 \cos\,[l\,(1 + x)^2] + C_3 \sin\,[l\,(1 + x)^2].$$

§ 21. Lineare Differentialgleichungen mit zweitem Glied.

Einleitung. Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung mit zweitem Gliede

$$\frac{d^ny}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

in welcher $P, Q, \ldots T, U, V$ im allgemeinen Funktionen von x sind, hat die Form

$$y = Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_n y_n,$$

wo Y ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung, $\eta = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_n y_n$ dagegen das allgemeine Integral der nämlichen Differentialgleichung mit gleich Null gesetztem zweiten Gliede ist. Man kann daher leicht zum allgemeinen Integral der vorgelegten Differentialgleichung gelangen, wenn es auf irgend eine Weise gelungen ist, ein partikuläres Integral Y

derselben zu finden, vorausgesetzt, daß man das allgemeine Integral der „verkürzten“ Differentialgleichung kennt.

a) Methode der Variation der Konstanten. (Von Lagrange.) In dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung ohne zweites Glied

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

werden $C_1, C_2, \ldots C_n$ als Funktionen von x betrachtet, deren Differentiale aus dem System der n Gleichungen

$$\begin{aligned}
y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{dC_n}{dx} &= 0,\\
\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} + \ldots + \frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx} &= 0,\\
&\vdots\\
\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{dC_2}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dC_n}{dx} &= 0,\\
\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dC_2}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx} &= V
\end{aligned}$$

zu bestimmen sind. Aus den sich ergebenden n Gleichungen $\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots n)$ folgt dann unmittelbar

$$C_i = \int \varphi_i(x)\, dx + c_i.$$

b) Methode von Cauchy. Wenn die Konstanten C_1, C_2, $\ldots C_n$ in dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung ohne zweites Glied $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ so bestimmt sind, daß für $x = \alpha$ den Anfangsbedingungen genügt wird:

$$y_\alpha = 0,\ y'_\alpha = 0, \ldots y_\alpha^{(n-2)} = 0,\ y_\alpha^{(n-1)} = V(\alpha),$$

dann ist $Y = \int^x y_\alpha\, d\alpha$ ein partikuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung mit zweitem Gliede, deren allgemeines Integral sonach lautet:

$$y = Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

c) Methode der integrierenden Faktoren. Werden

beide Seiten der gegebenen Differentialgleichung mit vdx multipliziert

$$v\left(\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy\right)dx = v\,Vdx,$$

so wird die linke Seite ein vollständiges Differential, wenn v der Differentialgleichung

$$\frac{d^n v}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(Pv)}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-2}(Qv)}{dx^{n-2}} + \ldots (-1)^{n-1}\frac{d\,(Tv)}{dx} +$$
$$+ (-1)^n\,Uv = 0$$

genügt. Diese letztere Gleichung liefert n integrierende Faktoren, mit Hilfe deren man nach wiederholter Anwendung der teilweisen Integration n Integrale erster Ordnung, d. h. n Gleichungen zwischen $y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ erhält, aus denen sich im allgemeinen die eben genannten Funktionen berechnen lassen.

Es ist eine empfehlenswerte Übung, die nachfolgenden Aufgaben nach jeder der angegebenen Methoden zu lösen.

Beispiele.

1) $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = \cos bx.$

Lös.: 1) Variation der Konstanten. Allgemeine Lösung der Differentialgleichung ohne zweites Glied:

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

Hieraus folgt durch Differentiation, indem man C_1 und C_2 als Funktionen von x betrachtet,

$$\frac{dy}{dx} = -aC_1 \sin ax + aC_2 \cos ax + \cos ax\frac{dC_1}{dx} + \sin ax\frac{dC_2}{dx}.$$

Setzt man hierin $\cos ax\frac{dC_1}{dx} + \sin ax\frac{dC_2}{dx} = 0$, so ergibt die weitere Differentiation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 C_1 \cos ax - a^2 C_2 \sin ax - a \sin ax\frac{dC_1}{dx} +$$
$$+ a \cos ax\frac{dC_2}{dx}.$$

Soll durch die für y, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gefundenen Ausdrücke der gegebenen Differentialgleichung genügt werden, so hat man

$-a \sin ax \frac{dC_1}{dx} + a \cos ax \frac{dC_2}{dx} = \cos bx$ anzunehmen.

Zur Bestimmung der Funktionen C_1 und C_2 dienen die Gleichungen

$$\cos ax \frac{dC_1}{dx} + \sin ax \frac{dC_2}{dx} = 0,$$

$$-a \sin ax \frac{dC_1}{dx} + a \cos ax \frac{dC_2}{dx} = \cos bx.$$

Aus denselben findet man

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{1}{a} \cos bx \sin ax,$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{a} \cos bx \cos ax,$$

und daher durch Integration

$$C_1 = \frac{1}{2a}\left[\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right] + A,$$

$$C_2 = \frac{1}{2a}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] + B.$$

Somit lautet das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$y = \frac{1}{2a}\left[\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right] \cos ax +$$

$$+ \frac{1}{2a}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] \sin ax + A \cos ax + B \sin ax =$$

$$= \frac{\cos bx}{a^2 - b^2} + A \cos ax + B \sin ax.$$

2) Methode von Cauchy. Bestimmt man in dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung ohne zweites Glied $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$ die Konstanten C_1 und C_2 so, daß für $x = \alpha$, $y_\alpha = 0$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\alpha} = \cos b\alpha$ wird, so ist $Y = \int^x y_\alpha d\alpha$ ein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung mit zweitem Gliede. Hiernach findet man

$$C_1 = -\frac{1}{a}\cos b\alpha \sin a\alpha,$$

$$C_2 = \frac{1}{a}\cos b\alpha \cos a\alpha,$$

$$y_\alpha = -\frac{1}{a}\cos b\alpha \sin a\alpha \cdot \cos ax + \frac{1}{a}\cos b\alpha \cos a\alpha \cdot \sin ax,$$

$$Y = \frac{1}{a}\int^x [-\cos b\alpha \sin a\alpha \cos ax + \cos b\alpha \cos a\alpha \cdot \sin ax]\, d\alpha =$$

$$= \frac{\cos bx}{a^2 - b^2}.$$

Es wird demnach das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung, wie oben

$$y = \frac{\cos bx}{a^2 - b^2} + A\cos ax + B\sin ax.$$

3) Methode der integrierenden Faktoren. Multipliziert man die gegebene Differentialgleichung mit $v dx$

$$1)\quad v\frac{d^2y}{dx^2}dx + a^2 vy dx = v\cos bx\, dx$$

und integriert mittels der Methode der teilweisen Integration, so folgt $v\dfrac{dy}{dx} - \displaystyle\int\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}dx + \int a^2 v y\, dx = \int v\cos bx\, dx + C,$

oder indem man zur Umformung dieser Gleichung dieselbe Methode nochmals anwendet

$$2)\quad v\frac{dy}{dx} - y\frac{dv}{dx} + \int y\left(\frac{d^2v}{dx^2} + a^2 v\right)dx = \int v\cos bx\, dx + C.$$

Hieraus erkennt man, daß die einmalige Integration der vorgelegten Differentialgleichung ausgeführt werden kann, wenn $\displaystyle\int y\left(\frac{d^2v}{dx^2} + a^2v\right)dx = 0$ ist. Zur Bestimmung der integrierenden Faktoren v hat man daher die Differentialgleichung $\dfrac{d^2v}{dx^2} + a^2v = 0$. Die partikulären Integrale derselben $v_1 = \cos ax$, $v_2 = \sin ax$ liefern die gesuchten integrierenden Faktoren. Die Gleichung 2) ergibt nun die beiden folgenden ersten Integrale

$$\frac{dy}{dx}\cos ax + ay\sin ax = \int\cos ax\cos bx\, dx + C_1,$$

$$\frac{dy}{dx}\sin ax - ay\cos ax = \int\sin ax\cos bx\, dx + C_2,$$

aus denen das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung durch Elimination der Ableitung $\frac{dy}{dx}$ erhalten werden kann. Man findet

$$y = \frac{\cos bx}{a^2 - b^2} + A \cos ax + B \sin ax.$$

4) Durch Erraten. Das zweite Glied der gegebenen Differentialgleichung ist $\cos bx$. Es liegt daher nahe, zu versuchen, ob in dem Ausdruck $y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx$ sich die Konstanten C_1 und C_2 so bestimmen lassen, daß derselbe der Differentialgleichung genügt. Man hat

$$y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b^2 C_1 \cos bx - b^2 C_2 \sin bx.$$

Setzt man diese Werte in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$-b^2 C_1 \cos bx - b^2 C_2 \sin bx + a^2 C_1 \cos bx + a^2 C_2 \sin bx = \cos bx.$$

Hieraus findet sich durch Koeffizientenvergleichung $C_1 = \frac{1}{a^2 - b^2}$ und $C_2 = 0$. Es ist daher $y = \frac{\cos bx}{a^2 - b^2}$ ein partikuläres und somit

$$y = \frac{\cos bx}{a^2 - b^2} + A \cos ax + B \sin ax$$

das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Im Falle $a = b$ ist der gefundene Ausdruck zu ersetzen durch folgenden: $y = \frac{x \sin ax}{2a} + A \cos ax + B \sin ax.$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = a \cos 2x.$

Anfangsbedingungen: Für $x = 0$ soll $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 1$ werden.

Lös.: $y = -\frac{1}{3}a \cos 2x + \frac{1}{3}a \cos x + \sin x.$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = f(x)$, wo f eine beliebig gegebene Funktion bedeutet. (Differentialgleichung der gestörten Schwingung.)

Lös.: $y = \frac{\sin kx}{k} \int^x f(x) \cos kx \, dx - \frac{\cos kx}{k} \int^x f(x) \sin kx \, dx +$
$+ A \cos kx + B \sin kx.$

4) $\frac{d^4y}{dx^4} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - 14y = \sin mx.$

Lös.: $y = \frac{\sin mx}{m^4 - 5m^2 - 14} + C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} +$

$+ C_3 \cos x\sqrt{7} + C_4 \sin x\sqrt{7}.$

Für $m = \pm\sqrt{7}$ verliert diese Lösung ihre Bedeutung.

5) $\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = x^2.$

Lös.: $y = \frac{1}{20}x^2 + \frac{9}{200}x + \frac{61}{4000} + C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x}.$

6) $\frac{d^4y}{dx^4} - a^4 y = x^2.$

Lös.: $y = -\frac{x^2}{a^4} + C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \sin ax + C_4 \cos ax.$

7) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2.$

Lös.: $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x}.$

8) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + a^2 y = e^{mx}.$

Lös.: $y = \frac{e^{mx}}{(m-a)^2} + A e^{ax} + Bx e^{ax}.$

Für $m = a$ tritt an die Stelle dieser Lösung die folgende:

$$y = (A + Bx + \tfrac{1}{2}x^2) e^{ax}.$$

9) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x.$

Lös.: $y = (\frac{1}{2}x^2 + C_1 + C_2 x) e^x.$

10) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = x^n.$

Lös.: $y = \frac{x^n}{(n-1)(n+2)} + C_1 x + \frac{C_2}{x^2}.$

Für $n = 1$ ist diese Gleichung zu ersetzen durch

$y = \frac{1}{3}x lx + C_1 x + \frac{C_2}{x^2}$, und für $n = -2$ durch

$$y = -\frac{1}{3x^2} lx + C_1 x + \frac{C_2}{x^2}.$$

§ 22. Simultane Differentialgleichungen.

Wenn die Anzahl der unbekannten Funktionen größer ist als 1, so sind zu deren Bestimmung ebensoviele (simultane) Differentialgleichungen erforderlich, als unbekannte Funktionen vorhanden sind.

Sind beispielsweise zwei Differentialgleichungen mit zwei unbekannten Funktionen y und z gegeben

$$f_1(x;\, y,\, y',\, \ldots\, y^{(m)};\, z,\, z',\, \ldots\, z^{(p)}) = 0,$$
$$f_2(x;\, y,\, y',\, \ldots\, y^{(n)};\, z,\, z',\, \ldots\, z^{(q)}) = 0,$$

so kann man zum Zwecke der Elimination der Funktion z die erste Gleichung $q$mal und die zweite $p$mal nacheinander differentiieren, wodurch man im ganzen $(p + q + 2)$ Gleichungen erhält, wovon $(p + q + 1)$ im allgemeinen zur Berechnung der $(p + q + 1)$ Größen $z, z', z'', \ldots z^{(p+q)}$ hinreichen. Setzt man die so gefundenen Werte in die noch nicht verwendete $(p + q + 2)$te Gleichung ein, so ergibt sich eine Differentialgleichung, welche nur y und deren Ableitungen enthält. Nachdem die Funktion y und damit auch deren Ableitungen bestimmt sind, ergibt sich die Funktion z im allgemeinen durch bloße Substitution der gefundenen Werte in den bereits für z erhaltenen Ausdruck. Sollte in den beiden gegebenen Gleichungen die Funktion z explizite nicht vorkommen, so könnte man nach Bestimmung der Funktion y die niedrigste vorkommende Ableitung von z durch bloße Substitution berechnen und hätte hierauf noch eine Differentialgleichung von der Form $\frac{d^r z}{dx^r} = \varphi(x)$ zu integrieren.

Beispiele.

1) 1) $\frac{dx}{dt} + 4x + 3y = t,$

2) $\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = e^t.$

Lös.: 1) Aus der ersten der gegebenen Gleichungen folgt unmittelbar

$$3)\quad y = \tfrac{1}{3}\left(t - 4x - \frac{dx}{dt}\right)$$

und hieraus durch Differentiation

$$4)\quad \frac{dy}{dt} = \tfrac{1}{3}\left(1 - 4\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Setzt man die für y und $\frac{dy}{dt}$ gefundenen Werte in die Gleichung 2) ein, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$5)\quad \frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 14x = 5t - 3e^t + 1,$$

welche nur noch die Funktion x enthält. Das allgemeine Integral von 5) lautet:

$$x = -\tfrac{31}{196} + \tfrac{5}{14}t - \tfrac{1}{8}e^t + C_1e^{-2t} + C_2e^{-7t}.$$

Nachdem auf diese Weise die Funktion x bestimmt ist, gelangt man ohne weitere Integration mit Hilfe der Gleichung 3) zu dem Werte der Funktion y. Es wird

$$y = \tfrac{9}{98} - \tfrac{1}{7}t + \tfrac{5}{24}e^t - \tfrac{2}{3}C_1e^{-2t} + C_2e^{-7t}.$$

2) Subtrahiert man die mit einer unbestimmten Konstanten λ multiplizierte Gleichung 2) von der Gleichung 1), so kommt

$$3)\quad \frac{dx}{dt} - \lambda\frac{dy}{dt} + (4 - 2\lambda)x + (3 - 5\lambda)y = t - \lambda e^t,$$

und hieraus, indem man $x - \lambda y = z$, $x = z + \lambda y$ substituiert

$$4)\quad \frac{dz}{dt} + (4 - 2\lambda)z + (3 - \lambda - 2\lambda^2)y = t - \lambda e^t.$$

Die Funktion y kann nun dadurch eliminiert werden, daß man $3 - \lambda - 2\lambda^2 = 0$ setzt. Führt man die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ in die Gleichung 4) ein, so ergeben sich die zwei weiteren Gleichungen

$$5)\quad \frac{dz_1}{dt} + 2z_1 = t - e^t,$$

$$6)\quad \frac{dz_2}{dt} + 7z_2 = t + \tfrac{3}{2}e^t,$$

deren Integrale

$$z_1 = x - y = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{3}e^t + C_1e^{-2t},$$
$$z_2 = x + \tfrac{3}{2}y = -\tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{7}t + \tfrac{3}{16}e^t + C_2e^{-7t}$$

sind. Durch Auflösung dieser letzteren Gleichungen nach x und y erhält man, wie oben

$$x = -\tfrac{31}{196} + \tfrac{5}{14}t - \tfrac{1}{8}e^t + \tfrac{3}{5}C_1e^{-2t} + \tfrac{2}{5}C_2e^{-7t},$$
$$y = \tfrac{9}{98} - \tfrac{1}{7}t + \tfrac{5}{24}e^t - \tfrac{2}{5}C_1e^{-2t} + \tfrac{2}{5}C_2e^{-7t}.$$

2) $\frac{dx}{dt} + 5x - 2y = e^t,$

$\frac{dy}{dt} - x + 6y = e^{2t}.$

Lös.: $x = \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{27}e^{2t} + C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t},$

$y = \frac{1}{40}e^t + \frac{7}{54}e^{2t} + \frac{1}{2}C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t}.$

3) $\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t,$

$\frac{dy}{dt} - x + 3y = e^{2t}.$

Lös.: $x = \frac{4}{25}e^t - \frac{1}{36}e^{2t} + C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t},$

$y = \frac{1}{25}e^t + \frac{7}{36}e^{2t} - (C_1 + C_2)e^{-4t} - C_2te^{-4t}.$

4) $\frac{dx}{dt} = x + y,$

$\frac{dy}{dt} = x - y.$

Lös.: $x = C_1e^{t\sqrt{2}} + C_2e^{-t\sqrt{2}},$

$y = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{t\sqrt{2}} - C_2(\sqrt{2} + 1)e^{-t\sqrt{2}}.$

5) $\frac{dx}{dt} = t + \frac{dy}{dt},$

$\frac{dy}{dt} = x.$

Lös.: $x = -1 - t + Ce^t,$

$y = -t - \frac{1}{2}t^2 + Ce^t + C_1.$

6) $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt},$

$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}.$

Lös.: $x = C_1e^{t\sqrt{2}} - C_2e^{-t\sqrt{2}} + C_3,$

$y = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{t\sqrt{2}} + C_2(\sqrt{2} + 1)e^{-t\sqrt{2}} + C_4.$

7) $\frac{d^2x}{dt^2} = ax + by,$

$\frac{d^2y}{dt^2} = a_1x + b_1y.$

Lös.: $x + \lambda_1y = C_1e^{\sqrt{a + a_1\lambda_1}\,t} + C_2e^{-\sqrt{a + a_1\lambda_1}\,t},$

$x + \lambda_2y = C_3e^{\sqrt{a + a_1\lambda_2}\,t} + C_4e^{-\sqrt{a + a_1\lambda_2}\,t},$

wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $a_1\lambda^2 + (a - b_1)\lambda - b = 0$ bedeuten.

8) $\frac{d^2x}{dt^2} = 11x + 16y,$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -8x - 13y.$

Lös.: $x = 2C_1 e^{t\sqrt{3}} + 2C_2 e^{-t\sqrt{3}} - C_3 \cos t\sqrt{5} - C_4 \sin t\sqrt{5},$

$y = -C_1 e^{t\sqrt{3}} - C_2 e^{-t\sqrt{3}} + C_3 \cos t\sqrt{5} + C_4 \sin t\sqrt{5}.$

9) $\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + 3y + 5,$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -22x - 15y + 4.$

Lös.: $x = \frac{87}{36} + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x,$

$y = -\frac{59}{18} - 2\,C_1 \cos 2x - 2\,C_2 \sin 2x - \frac{11}{3}\,C_3 \cos 3x -$

$- \frac{11}{3}\,C_4 \sin 3x.$

10) $\frac{d^2x}{dt^2} = 3x - y + 1,$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -2x + 2y + 3.$

Lös.: $x = -\frac{5}{4} + C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} + C_4 e^{-2t},$

$y = -\frac{11}{4} + 2C_1 e^t + 2C_2 e^{-t} - C_3 e^{2t} - C_4 e^{-2t}.$

11) $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2 y = 0,$

$\frac{d^2y}{dt^2} - m^2 x = 0.$

Lös.: $x = [C_1 e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} + C_2 e^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}] \cos \frac{m\sqrt{2}}{2}\,t +$

$+ [C_3 e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} + C_4 e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}] \sin \frac{m\sqrt{2}}{2}\,t,$

$y = [C_1 e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} - C_2 e^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}] \sin \frac{m\sqrt{2}}{2}\,t -$

$-[C_3 e^{\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}} - C_4 e^{-\frac{m\sqrt{2}\,t}{2}}] \cos \frac{m\sqrt{2}}{2}\,t.$

12) $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2 x = 0,$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + m^2x = 0.$$

Lös.: $x = C_1 \cos mt + C_2 \sin mt,$

$y = - C_1 \cos mt - C_2 \sin mt + C_3 t + C_4.$

13) $\frac{d^2x}{dt^2} + x + 2y = \cos mt,$

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{15}{2}x - y = \sin nt.$

Lös.: $x = -\frac{1+m^2}{m^4-16}\cos mt - \frac{2}{n^4-16}\sin nt + C_1 e^{2t} +$

$+ C_2 e^{-2t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t,$

$y = -\frac{\frac{15}{2}}{m^4-16}\cos mt + \frac{1-n^2}{n^4-16}\sin nt - \frac{5}{2}C_1 e^{2t} -$

$- \frac{5}{2}C_2 e^{-2t} + \frac{3}{2}C_3 \cos 2t + \frac{3}{2}C_4 \sin 2t.$

Für $m = \pm 2$, $n = \pm 2$ verliert diese Lösung ihre Gültigkeit.

14) $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x + 25y = \cos 2t,$

$\frac{d^2y}{dt^2} - 4x - 15y = \sin 2t.$

Lös.: $x = -\frac{19}{81}\cos 2t - \frac{25}{81}\sin 2t + (C_1 + C_2 t)\, e^{t\sqrt{5}} +$

$+ (C_3 + C_4 t)\, e^{-t\sqrt{5}},$

$y = \frac{4}{81}\cos 2t + \frac{1}{81}\sin 2t - \frac{2}{5}(C_1 + C_2 t)\, e^{t\sqrt{5}} -$

$- \frac{2}{5}(C_3 + C_4 t)\, e^{-t\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{5}}{25} C_2 e^{t\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{5}}{25} C_4 e^{-t\sqrt{5}}.$

15) 1) $\frac{dy}{dt} + \varphi'(t)\, y - \psi'(t)\, x = 0,$

2) $\frac{dx}{dt} + \psi'(t)\, y + \varphi'(t)\, x = 0,$ wo $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ die Ableitungen zweier gegebenen Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ sind. (*Nouvelles Annales de Math.* Bd. XXVI, pag. 553.)

Lös.: Multipliziert man 1) mit y und 2) mit x und addiert, so folgt

$$y\frac{dy}{dt} + x\frac{dx}{dt} + \varphi'(t)(x^2 + y^2) = 0,$$

oder indem man $x^2 + y^2 = u$ setzt,

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dt} = -\varphi'(t)\cdot u.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist

$$u = x^2 + y^2 = C_1 e^{-2\varphi(t)}.$$

Multipliziert man weiter 1) mit x und 2) mit y und subtrahiert, so wird

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} - \psi'(t)(x^2 + y^2) = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \psi'(t)\,dt, \quad \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \psi'(t)\,dt.$$

Als allgemeines Integral dieser letzteren Differentialgleichung ergibt sich

$$\operatorname{arctang}\frac{y}{x} = \psi(t) + C_2 \text{ oder } \frac{y}{x} = \operatorname{tang}[\psi(t) + C_2].$$

Setzt man noch $\sqrt{C_1} = C'$, so erhält man schließlich nach einfacher Rechnung

$$y = C' e^{-\varphi(t)} \sin[\psi(t) + C_2],$$
$$x = C' e^{-\varphi(t)} \cos[\psi(t) + C_2].$$

16) Die Bewegung eines Punktes in der Ebene ist definiert durch die Gleichungen

$$1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\tfrac{5}{2}x + \tfrac{3}{2}y,$$

$$2) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{5}{2}y,$$

wo t die Zeit bedeutet und x, y die rechtwinkligen Koordinaten desjenigen Punktes der Ebene sind, in welchem sich der bewegliche Punkt zur Zeit t befindet. Man untersuche die Bewegung des Punktes unter Voraussetzung der Anfangsbedingungen, daß

$$\text{für } t = 0, \text{ a) } x = 1,\ y = -1,\ \frac{dx}{dt} = 1,\ \frac{dy}{dt} = 1,$$

$$\text{b) } x = 0,\ y = 0,\ \frac{dx}{dt} = 0,\ \frac{dy}{dt} = 1 \text{ sei.}$$

Lös.: Nach der zweiten der unter Aufgabe 1) angegebenen Methoden gelangt man leicht zu den Integralen

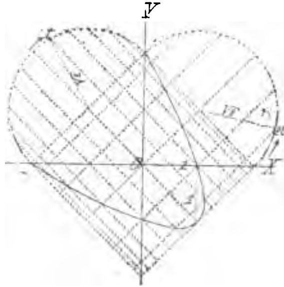
$$3) \begin{cases} x - y = A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t, \\ x + y = A_2 \cos t + B_2 \sin t. \end{cases}$$

Führt man in diese Gleichungen die Anfangsbedingungen a) ein, so ergibt sich

$$4a)\quad \begin{cases} x - y = 2\cos 2t, \\ x + y = 2\sin t, \end{cases}$$

oder indem man mittels der Formeln $\frac{x+y}{\sqrt{2}} = X$, $\frac{x-y}{\sqrt{2}} = Y$ zu den 45°-Linien als neuen Achsen transformiert

$$5a)\quad \begin{cases} X = \sqrt{2}\sin t, \\ Y = -\sqrt{2}\cos 2t. \end{cases}$$



Eliminiert man aus diesen letzteren Gleichungen die Zeit t, so ergibt sich

$$Y = \sqrt{2}\,(X^2 - 1),$$

und es ist daher in diesem Falle die Bahn des beweglichen Punktes eine Parabel und zwar derjenige Teil derselben, welcher zwischen den Punkten $X = \pm\sqrt{2}$, $Y = \sqrt{2}$ liegt. Mit Hilfe der Gleichungen 4a) kann nun auch leicht die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des beweglichen Punktes zu irgend einer Zeit t ermittelt werden.

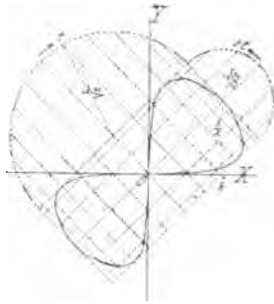
Die Anfangsbedingungen b) ergeben

$$4b)\quad \begin{cases} x - y = -\tfrac{1}{2}\sin 2t, \\ x + y = \sin t. \end{cases}$$

Indem man wieder zu den 45°-Linien transformiert, folgt

$$5b)\quad \begin{cases} Y = \dfrac{\sin 2t}{2\sqrt{2}}, \\ X = \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

oder durch Elimination der Zeit t: $Y^2 = X^2 - 2X^4$.



In diesem Falle ist die Bahn des beweglichen Punktes eine Kurve vierter Ordnung, welche, ähnlich wie die Lemniskate, die Form einer liegenden 8 hat.

Die Formeln 5a) und 5b) gestatten eine einfache Konstruktion der in Frage stehenden Kurven.

Kapitel IV.

Variationsrechnung.

§ 23. Formeln und Lehrsätze.

I. Gegeben sei ein Ausdruck $F(x, y, y', y'' \ldots)$ in dem y als unbekannte Funktion von x anzusehen ist und $y', y'' \ldots$ ihre Ableitungen nach x sind. Man kann sich die Aufgabe stellen, diejenige Funktion y zu finden, welche, in F eingesetzt, diesen Ausdruck zu einem Maximum oder Minimum macht.

Zu diesem Zweck läßt man die Funktion y in die sehr wenig verschiedene Funktion $y + \delta y$ übergehen, man variiert sie. δy bestehe aus einem sehr kleinen stetig veränderlichen und von x unabhängigen Faktor ε und einer völlig willkürlichen Funktion $\varphi(x)$, sodaß $\delta y = \varepsilon \varphi(x)$ ist.

Zugleich gehe y' in $y' + \delta y'$, y'' in $y'' + \delta y''$ über usw.

Dann ist

$$\delta y' = (y' + \delta y') - y' = (y' + \varepsilon \varphi'(x)) - y' = \varepsilon \varphi'(x) = \frac{d}{dx} \delta y.$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz, daß die Reihenfolge der Differentiation und Variation gleichgültig ist, kann leicht verallgemeinert werden.

Bei der Variation geht $F(x, y, y', y'' \ldots)$ über in $F + \delta F = F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'' \ldots)$. Nach dem Taylorschen Satze ist unter Vernachlässigung der sehr kleinen Glieder höherer Ordnung

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' + \ldots \text{ oder}$$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y) + \frac{\partial F}{\partial y''}\frac{d^2}{dx^2}(\delta y) + \ldots$$

Für jede Funktion y, welche F einen Maximal- oder Minimalwert erteilt, muß δF verschwinden, die Gleichung $\delta F = 0$ kann also zur Bestimmung von y gebraucht werden.

II. Ist statt der Funktion F das bestimmte Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y' y'')\, dx,$$

wobei x_0 und x_1 zunächst als gegebene Konstanten angesehen werden mögen, zu einem Maximum oder Minimum zu machen, so verfährt man wie vorher.

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'')\, dx -$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta F\, dx,$$
$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y) + \frac{\partial F}{\partial y''}\frac{d^2}{dx^2}(\delta y)\right] dx.$$

Durch partielle Integration ergibt sich

$$\delta J = \left[\delta y \left\{\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\} + \delta y' \frac{\partial F}{\partial y''}\right]_{x_0}^{x_1} +$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right] \delta y\, dx.$$

Kommen höhere Ableitungen als y'' vor, so ist das Verfahren ganz entsprechend, kommt y oder y' oder y'' nicht vor, so fallen die betreffenden Glieder fort.

Damit δJ verschwindet, müssen die Gleichungen bestehen:

1) $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$ (Hauptgleichung),

2) $\left[\delta y \left\{\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\} + \delta y' \frac{\partial F}{\partial y''}\right]_{x_0}^{x_1} = 0$ (Randgleichung).

In dem Spezialfall, daß F nur eine Funktion von y und y' ist, wird ein erstes Integral der Hauptgleichung

$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ erhalten in der Form

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

III. Die Hauptgleichung ist eine Differentialgleichung für die gesuchte Funktion y, die Randgleichung dient zur Bestimmung der Konstanten, die bei der Lösung jeder Differentialgleichung auftreten. Kommt in F nur x und y vor, so erhält man keine Differential-, sondern eine gewöhnliche Gleichung zwischen x und y, kommt x, y, y' vor, so sind zwei Konstanten zu bestimmen, kommt x, y, y', y'' vor, vier.

Es genügt, die letztere, allgemeinere Aufgabe zu untersuchen.

Fall 1. y und y' soll für die gegebenen konstanten Größen x_0 und x_1 vorgeschriebene Werte annehmen.

Dann ist eine Änderung der Funktion für diese Werte nicht erlaubt, es muß δy und $\delta y'$ sowohl für x_0 wie für $x_1 = 0$ sein. Die Randgleichung ist von selbst erfüllt. Zur Bestimmung der Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4, die in der gefundenen Funktion $y = \psi(x)$ auftreten dient die Forderung, daß die Kurve $y = \psi(x)$ durch die Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) gehen soll und daß dort ihre Tangente eine vorgeschriebene Richtung gegen die X-Achse hat.

$$\begin{aligned} &1)\ y_0 = \psi(x_0, c_1, c_2, c_3, c_4);\\ &2)\ y_1 = \psi(x_1, c_1, c_2, c_3, c_4);\\ &3)\ y'_0 = \psi'(x_0, c_1, c_2, c_3, c_4);\\ &4)\ y'_1 = \psi'(x_1, c_1, c_2, c_3, c_4). \end{aligned}$$

Fall 2. Die Endpunkte der Kurve $y = \psi(x)$ sollen auf den gegebenen Geraden $x = x_0$, $x = x_1$ liegen.

Dann ist $(\delta y)_{x_0}$, $(\delta y)_{x_1}$, $(\delta y')_{x_0}$, $(\delta y')_{x_1}$ beliebig, also muß in der Randgleichung jedesmal der Koeffizient von einer jeden dieser Größen $= 0$ sein.

$$1)\ \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]_{x_1} = 0; \quad 2)\ \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]_{x_1} = 0;$$

$$3)\ \left[\frac{\partial F}{\partial y''}\right]_{x_0} = 0; \quad 4)\ \left[\frac{\partial F}{\partial y''}\right]_{x_1} = 0.$$

Setzt man den aus der Hauptgleichung gefundenen Wert für y in diese vier Gleichungen ein, so kann man aus ihnen die vier Konstanten bestimmen.

Fall 3. x_0 und x_1 seien auch veränderungsfähig. (Die Endpunkte der gesuchten Kurve liegen auf gegebenen Kurven.)

$$\delta J = \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} (F + \delta F)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} F\, \delta x,$$

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} (F + \delta F)\, dx - \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} (F + \delta F)\, dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} (F + \delta F)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} F\, dx,$$

$$\delta J = \Big(F\, \delta x\Big)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \delta F\, dx.$$

Die Hauptgleichung bleibt dieselbe wie bisher, als Randgleichung erhält man

a) $\left[F\delta x + \delta y \left\{\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\} + \delta y' \frac{\partial F}{\partial y''}\right]_{x_0}^{x_1} = 0,$

$(\delta y)_{x_1}$ ist nicht etwa δy_1, sondern

b) $(\delta y)_{x_0} = \delta y_0 - (y')_{x_0}\, \delta x_0\,;\ (\delta y)_{x_1} = \delta y_1 - (y')_{x_1}\, \delta x_1,$

c) $(\delta y')_{x_0} = \delta y'_0 - (y'')_{x_0}\, \delta x_0\,;\ (\delta y')_{x_1} = \delta y'_1 - (y'')_{x_1}\, \delta x_1.$

Sind die Kurven, auf denen die Endpunkte der gesuchten Kurve liegen, dargestellt durch die Gleichungen

d) $y_0 = \varphi_0\,(x_0);\ y_1 = \varphi_1\,(x_1)$, so ist

e) $\delta y_0 = \varphi'_0\,(x_0)\, \delta x_0\,;\ \delta y_1 = \varphi'_1\,(x_1)\, \delta x_1.$

Mittels der Gleichungen b), c) und e) kann man $(\delta y)_{x_0}$, $(\delta y)_{x_1}$, $(\delta y')_{x_0}$, $(\delta y')_{x_1}$, δy_0, δy_1 durch δx_0, δx_1, $\delta y'_0$, $\delta y'_1$ ausdrücken.

Setzt man diese Werte in a) ein, so erhält man eine Summe von vier Produkten, die gleich 0 sein soll

$$A\, \delta x_0 + B\, \delta x_1 + C\, \delta y'_0 + D\, \delta y'_1 = 0.$$

Da jetzt die δ-Größen willkürlich sind, müssen ihre Koeffizienten $= 0$ sein. So erhält man vier Gleichungen, wozu noch die beiden Gleichungen d) kommen und, wenn aus der Hauptgleichung $y = \psi\,(x, c_1, c_2, c_3, c_4)$ gefunden war:

f) $y_0 = \psi\,(x_0, c_1, c_2, c_3, c_4);\ y_1 = \psi\,(x_1, c_1, c_2, c_3, c_4).$

Man hat also 8 Gleichungen für die 8 Unbekannten x_0, y_0, x_1, y_1, c_1, c_2, c_3, c_4.

Fall 4. Kommen in der Funktion F auch die Grenzen x_0, y_0, x_1, y_1 vor, so bleibt die Hauptgleichung dieselbe und die Randgleichung wird

$$\left[F\delta x + \delta y \left\{\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\} + \delta y' \frac{\partial F}{\partial y''}\right]_{x_0}^{x_1} +$$

$$+ \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial x_0} dx + \delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y_0} + \delta x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \delta y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y_1} dx = 0.$$

Die Behandlung ist dieselbe wie vorher.

IV. Enthält F die Funktionen y und z, ist also z. B.

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', z, z')\, dx,$$

so findet man, wenn man x_0 und x_1 als konstant voraussetzt

$$\delta J = \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y'} + \delta z \frac{\partial F}{\partial z'}\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\} \delta y + \right.$$

$$\left. + \left\{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right\} \delta z\right] dx = 0.$$

Man erhält hier also zwei simultane Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0,$$

sowie die Randgleichung

$$\left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y'} + \delta z \frac{\partial F}{\partial z'}\right]_{x_0}^{x_1} = 0.$$

Letztere dient wieder zur Bestimmung der Konstanten.

Kommen in F höhere Ableitungen der unbekannten Funktionen vor, oder sind die Grenzen variabel, so ist die Behandlung ganz analog den vorher abgeleiteten Entwicklungen.

V. Es kommt häufig vor, daß ein bestimmtes Integral zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, während an die unbekannten Funktionen y und z noch eine andere Anforderung, die sogenannte Nebenbedingung, gestellt wird.

Fall 1. $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')$ soll zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden, während die Nebenbedingung

$\varphi(x, y, y', z, z')$ besteht.

Es läßt sich zeigen, daß das Resultat erhalten werden kann durch Behandlung des Integrals

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_1} (F + \lambda\varphi)\, dx,$$

wobei y, z und λ als gesuchte Funktionen anzusehen sind.

Fall 2. $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,dx$ soll zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden, während zugleich das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi\,(x, y, y', y'')\,dx$$

einen vorgeschriebenen Wert a hat.

Man erhält y, indem man

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_1} (F + \lambda\,\varphi)\,dx$$

zu einem Maximum oder Minimum macht.

Hierbei ist aber λ als konstant anzusehen.

§ 24. Beispiele.

1) Aufg. Es soll unter allen auf dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem bezogenen Kurven diejenige herausgesucht werden, welche in jedem ihrer Punkte das Produkt aus der Ordinate in die um die Ordinate verminderte Abszisse größer macht, als es an derselben Abszisse irgend eine der andern Kurven machen kann.

Lös.: Soll der Ausdruck $F = y\,(x - y)$ in dem angedeuteten Sinne ein Maximum werden, so muß y als Funktion von x so gewählt werden, daß die erste Variation von F verschwindet. Nun ist

$$\delta F = (x - y)\,\delta y - y\,\delta y;$$

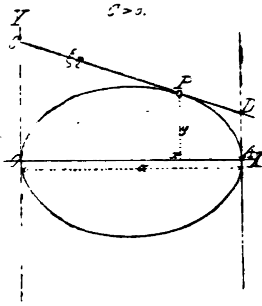
man hat daher zur Bestimmung von y die Gleichung $(x - 2y)\,\delta y = 0$, woraus sich $y = \frac{1}{2}x$ ergibt. Die verlangte Kurve ist hiernach die Gerade $y = \frac{1}{2}x$.

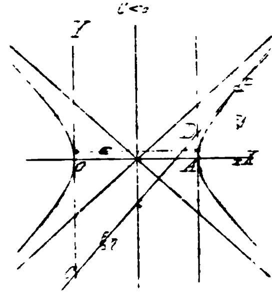
2) Aufg. Es soll unter allen benachbarten, auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Kurven, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen, diejenige herausgesucht werden, für welche die Tangente im Punkte P von der Ordinatenachse und der Geraden $x = \alpha\ (\alpha > 0)$ Stücke OC und AD abschneidet (gezählt von der X-Achse aus), deren Produkt ein Maximum oder Minimum ist.

Lös.: Werden mit x, y die Koordinaten des Punktes P und

mit ξ, η die laufenden Koordinaten bezeichnet und ist $y' = \frac{dy}{dx}$, so lautet die Gleichung der Tangente im Punkte P:

$$\eta - y = y' (\xi - x).$$





Nun ist $OC = y - y'x$, $AD = y + y'(a - x)$, und es soll $OC \cdot AD = (y - y'x)[y + y'(a - x)]$ ein Maximum oder ein Minimum werden. Da die gesuchte Kurve nur mit allen denjenigen benachbarten Kurven verglichen wird, welche durch den Punkt $P(x, y)$ gehen, so ist offenbar $\delta y = 0$, und man hat, wenn

$$F = (y - y'x)(y + ay' - y'x)$$

gesetzt wird,

$$\delta F = [(a - x)(y - y'x) - x(y + ay' - y'x)]\, \delta y'.$$

Zur Bestimmung der gesuchten Kurve ergibt sich sonach die Differentialgleichung

$$(a - x)(y - y'x) - x(y + ay' - y'x) = 0 \text{ oder}$$

$$2\frac{dy}{y} = \frac{a - 2x}{(a - x)x}\, dx,$$

deren allgemeines Integral $y^2 = Cx(a - x)$ ist.

Die verlangte Kurve ist hiernach eine Ellipse oder eine Hyperbel mit den Scheiteln O und A, je nachdem C positiv oder negativ ist. Die Konstante C kann erst dann bestimmt werden, wenn den Kurven noch eine weitere Bedingung auferlegt wird.

Beide Kurven ergeben, wenn man vom Vorzeichen absieht, Maxima und zwar wird $F = \frac{1}{4}Ca^2$. Sind a und b die Halbachsen der Ellipse, resp. der Hyperbel, so ist $\frac{1}{4}a^2 = a^2$, und es wird für die Ellipse $C = +\frac{b^2}{a^2}$ und für die Hyperbel $C = -\frac{b^2}{a^2}$. Der absolute Wert von F ist demnach in beiden Fällen $= b^2$.

3) Aufg. Zwei auf derselben Seite der X-Achse gegebene Punkte $A\,(x_0, y_0)$, $B\,(x_1, y_1)$ sollen durch eine Kurve so verbunden werden, daß die Rotationsoberfläche, welche entsteht, wenn man diese Kurve um die X-Achse rotieren läßt, einen möglichst kleinen Flächeninhalt habe.

Lös.: Der Flächeninhalt, welcher ein Minimum werden soll, ist bestimmt durch

$$J = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Da in diesem Falle die Funktion $F(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$ die Variable x explizite nicht enthält, so ergibt sich als ein erstes Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$, welche infolge der Gleichung $\delta J = 0$ bestehen muß,

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C \text{ oder}$$

$$y\sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{y y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C, \quad \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C, \quad y = C\sqrt{1 + y'^2}.$$

Setzt man noch, da y immer positiv bleiben soll, $C = +m$, so folgt

$$y = m\sqrt{1 + y'^2} \text{ und hieraus } y' = \frac{1}{m}\sqrt{y^2 - m^2}, \quad dx = \frac{m\,dy}{\sqrt{y^2 - m^2}},$$

$$x - x_0' = m\, l\, \frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m} \quad \text{oder} \quad y = \tfrac{1}{2} m \left(e^{\frac{x - x_0'}{m}} + e^{-\frac{x - x_0'}{m}}\right).$$

Die verlangte Kurve ist hiernach eine Kettenlinie. Die Konstanten x_0' und m bestimmen sich aus den Gleichungen

$$y_0 = \tfrac{1}{2} m \left(e^{\frac{x_0 - x_0'}{m}} + e^{-\frac{x_0 - x_0'}{m}}\right),$$

$$y_1 = \tfrac{1}{2} m \left(e^{\frac{x_1 - x_0'}{m}} + e^{-\frac{x_1 - x_0'}{m}}\right),$$

welche ausdrücken, daß die gefundene Kurve durch die gegebenen Punkte A und B geht.

4) Aufg. Gegeben sind zwei Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1). Es soll eine Kurve gezeichnet werden, die durch dieselben geht und die in bezug auf die X-Achse das kleinste Trägheitsmoment hat.

Das zu variierende Integral ist hier

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y^2\, ds = \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$\delta J = \left(\frac{y^2 y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y\right)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[2y\sqrt{1+y'^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{y^2 y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\right]\delta y\,dx.$$

Die Hauptgleichung erhält man, wenn man den Klammerausdruck des Integrals $= 0$ setzt. Multipliziert man diese Gleichung mit dem Doppelten des in der runden Klammer stehenden Ausdrucks, so erhält man

$$4y^3 y' - \frac{2y^2 y'}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2 y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0,$$

$$y^4 = \frac{y^4 y'^2}{1+y'^2} + m^4,$$

$$y'^2 = \frac{y^4 - m^4}{m^4},$$

$$x = \pm m^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^4 - m^4}} + c.$$

Setzt man $y = mz$, $z^2 = \frac{1}{1-t^2}$ (cf. Bd. II, Abt. 1, pag. 183, Aufg. 4), so ist x auf das elliptische Integral erster Gattung

$$x = \pm \frac{m}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{1}{2}t^2)}} + c$$ zurückgeführt, während

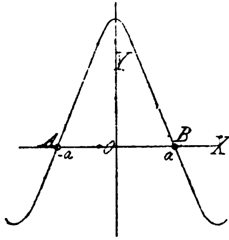
$$y = \pm \frac{m}{\sqrt{1-t^2}}$$ ist.

Da die Endpunkte der Kurve vorgeschrieben sind, so verschwindet δy sowohl für x_0 wie für x_1, die Randgleichung ist also von selbst erfüllt.

Da die Kurve durch die gegebenen Punkte gehen muß, so erhält man durch Einsetzen der betreffenden Werte und Elimination von t zwei Gleichungen für m und c.

Das elliptische Integral kann näherungsweise berechnet werden nach Bd. II, Abt. 1, pag. 197, Aufg. 19.

5) Aufg. Es wird eine Kurve gesucht, welche zwei gegebene Punkte A und B der X-Achse verbindet und das Integral $\int_{-a}^{+a}(y''^2 - 2y)\,dx$ zu einem Minimum macht, wo $-a$ und $+a$ beziehungsweise die Abszissen von A und B sind.



Lös.: Sei $J = \int_{-a}^{+a} (y''^2 - 2y)\, dx$; dann wird

$$\delta J = 2\int_{-a}^{+a} (y''\,\delta y'' - \delta y)\, dx = 2\Big[y''\,\delta y'\Big]_{-a}^{+a} -$$

$$- 2\int_{-a}^{+a} (y'''\,\delta y' + \delta y)\, dx = 2\Big[y''\,\delta y'\Big]_{-a}^{+a} - 2\Big[y'''\,\delta y\Big]_{-a}^{+a} +$$

$$+ 2\int_{-a}^{+a} (y'''' - 1)\, \delta y\, dx.$$

Die Gleichung $\delta J = 0$ zerfällt in die drei weiteren

$$1)\ y'''' - 1 = 0,\ 2)\ \Big[y'''\,\delta y\Big]_{-a}^{+a} = 0,\ 3)\ \Big[y''\,\delta y'\Big]_{-a}^{+a} = 0,$$

von denen die zweite, da δy in den vorgeschriebenen Punkten A und B verschwindet, nicht weiter in Betracht kommt. Die Differentialgleichung 1) liefert

$$y = \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{6}C_1 x^3 + \tfrac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Zur Bestimmung der Konstanten dient einerseits die Bemerkung, daß die gefundene Kurve durch die gegebenen Punkte A und B gehen muß, anderseits die Gleichung 3), zufolge welcher, da $\delta y'$ für $x = \pm a$ nicht gleich Null ist, y'' in den gegebenen Punkten verschwinden muß. Man erhält

$$C_1 = 0,\ C_2 = -\tfrac{1}{2}a^2,\ C_3 = 0,\ C_4 = \tfrac{5}{24}a^4,$$

und es ist daher die Gleichung der gesuchten Kurve

$$y = \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{4}a^2x^2 + \tfrac{5}{24}a^4.$$

6) Aufg. Zwei gegebene Punkte A und B sollen so durch eine Kurve verbunden werden, daß die Fläche, welche durch diese Kurve, ihre Evolute und die Krümmungsradien in den Endpunkten der ersteren begrenzt wird, einen möglichst kleinen Inhalt habe. Man bestimme diese Kurve unter der Voraussetzung, daß sie der X-Achse ihre konkave Seite zukehre. (Euler, *meth. inv.* Cap. III, Nr. 51).

Lös.: Wenn a und b die Abszissen der gegebenen Punkte sind, so hat man (vgl. Bd. II, Abt. 1, pag. 124, c))

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varrho^2 \, d\alpha = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{(1+y'^2)^2}{y''} \, dx$$

zu einem Minimum zu machen.

Die Hauptgleichung wird hier, da x in F nicht explizite vorkommt:

$$1) \quad -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0.$$

Die Randgleichung ist

$$\left[\delta y \left\{\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\} - \delta y' \frac{\partial F}{\partial y''}\right]_a^b = 0.$$

Da die Kurve durch gegebene Punkte gehen soll, so ist δy für a und $b = 0$. $\delta y'$ ist aber für beide Werte von x willkürlich, also müssen die betreffenden Faktoren $= 0$ sein.

Man erhält also als Randbedingungen

$$2) \quad \left[\frac{\partial F}{\partial y''}\right]_{x=a} = 0 \text{ und } 3) \quad \left[\frac{\partial F}{\partial y''}\right]_{x=b} = 0.$$

Als ein erstes Integral der Differentialgleichung 1) ergibt sich sofort

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''} = C_1.$$

Schreibt man die letztere Gleichung in der Form

$$\frac{\partial (F - C_1 y')}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial (F - C_1 y')}{\partial y''} = 0$$

und beachtet, daß die Funktion $F - C_1 y'$ die Variable x explizite nicht enthält, so findet man für das Integral derselben

$$4) \quad F - C_1 y' - y'' \frac{\partial F}{\partial y''} = C_2.$$

Im vorliegenden Falle ist $F = \frac{(1+y'^2)^2}{y''}$, $\frac{\partial F}{\partial y''} = -\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2$.

Die Gleichung 4) wird daher

$$\frac{(1+y'^2)^2}{y''} - C_1 y' + \frac{(1+y'^2)^2}{y''} = C_2 \text{ oder } \frac{(C_2 + C_1 y')y''}{(1+y'^2)^2} = 2.$$

Substituiert man zum Zwecke der Integration dieser letzteren Differentialgleichung

$$y' = \operatorname{tang} \alpha, \quad y'' = \frac{d\alpha}{dx \cos^2 \alpha}, \text{ so folgt}$$

$$(C_2 \cos^2 \alpha + C_1 \sin \alpha \cos \alpha)\, d\alpha = 2dx \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{4}(C_2 + C_2 \cos 2\alpha + C_1 \sin 2\alpha)\, d\alpha = dx,$$

und wenn man noch $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\varphi$, $d\alpha = -\frac{1}{2}d\varphi$ setzt,

$$dx = -\tfrac{1}{8}(C_2 - C_2 \cos \varphi + C_1 \sin \varphi)\, d\varphi$$

und hieraus durch Integration

$$5)\quad x - x_0 = -\tfrac{1}{8}(C_2 \varphi - C_2 \sin \varphi - C_1 \cos \varphi).$$

Ferner ist

$$dy = \operatorname{tang} \alpha\, dx = \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\varphi \cdot dx = -\tfrac{1}{8}(C_1 + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi)\, d\varphi$$

und daher

$$6)\quad y - y_0 = -\tfrac{1}{8}(C_1 \varphi + C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi).$$

Zufolge der Gleichungen 2) und 3) muß für $x = a$ und $x = b$ der Ausdruck

$$\frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{\left[\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right] \frac{dx}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}\frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2x}{d\varphi^2}}$$

verschwinden, d. h. die in Frage stehende Kurve muß in den gegebenen Punkten Spitzen besitzen, und da, wie die rechte Seite dieser Gleichung erkennen läßt, $\frac{dx}{d\varphi} = 0$ sein muß, so stehen die Tangenten in den genannten Punkten senkrecht auf der X-Achse. Es ist nun zweckmäßig, die X-Achse durch die beiden gegebenen Punkte zu legen und $a = 0$, $b = 2r\pi$ anzunehmen, wo r eine gegebene Konstante bedeutet.

B e s t i m m u n g d e r K o n s t a n t e n. Setzt man die Wertepaare (0,0) und $(2r\pi, 0)$ in die Gleichungen 5) und 6) ein, so erhält man

a) $-x_0 = -\frac{1}{8}(-C_1)$,
b) $2r\pi - x_0 = -\frac{1}{8}(2\pi C_2 - C_1)$,
c) $-y_0 = -\frac{1}{8}(-C_2)$,
d) $-y_0 = -\frac{1}{8}(2\pi C_1 - C_2)$.

Subtrahiert man a) von b), so erhält man $C_2 = -8r$, aus d) und c) findet sich $C_1 = 0$. Es ist dann $x_0 = 0$, $y_0 = r$, demnach geht das Gleichungssystem 5) und 6) über in

$$x = r(\varphi - \sin \varphi),$$
$$y = r(1 - \cos \varphi).$$

Die gesuchte Kurve ist eine gewöhnliche Zykloide.

7) Aufg. Es ist der Punkt $B(x_1, y_1)$ fest gegeben, ferner die Parallele zur Ordinatenachse $x = x_0$. Es soll eine Kurve gezeichnet werden, deren einer Endpunkt auf dieser Geraden liegt, während der andere B ist. Die Kurve soll bei der Rotation um die X-Achse eine Rotationsfläche von möglichst kleinem Flächeninhalte ergeben.

Lös. Die Aufg. ist von Aufg. 3) nur durch die Bestimmung der Konstanten verschieden. Die Gleichung der Kurve ist

$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x-x_0'}{m}} + e^{-\frac{x-x_0'}{m}}\right)$ (Kettenlinie), die Randgleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y\right)_{x_0}^{x_1} = \left(\frac{y y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)_{x_1} \delta y_1 - \left(\frac{y y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)_{x_0} \delta y_0 = 0.$$

Da B fest ist, ist δy_1, also auch der erste Ausdruck, ohne weiteres $= 0$. Dafür hat man aber die Bedingung

$$y_1 = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x_1-x_0'}{m}} + e^{-\frac{x_1-x_0'}{m}}\right),$$

δy_0 ist beliebig, also muß $\frac{y y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ für x_0 verschwinden.

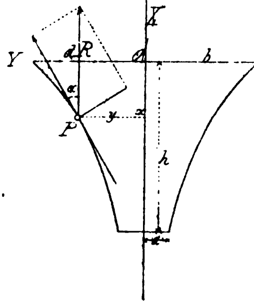
y kann aber für keinen reellen Wert von x verschwinden. Für $y' = \infty$ würde der Ausdruck nicht $= 0$ werden, weil außer dem Nenner auch der Zähler unendlich wird, also muß $y' = 0$ sein. Die Gerade $x = x_1$ ist also die Achse der Kettenlinie.

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x_0-x_0'}{m}} - e^{-\frac{x_0-x_0'}{m}}\right) = 0, \text{ also } x_0' = x_0.$$

x_0' ist somit bestimmt, durch Einsetzen dieses Wertes in y_1 erhält man für m eine transzendente Gleichung.

8) Aufg. Man bestimme die Form, die ein Sprengloch besitzt, nachdem das zu sprengende Material herausgeschleudert ist. (Culmann: Der Minentrichter, Vierteljahresschrift der naturforsch. Gesellsch. Zürich, 10ter Jahrgang, 1871, S. 28—41.)

Lös.: Wenn das zu sprengende Material homogen ist, so wird der Minentrichter offenbar die Gestalt einer Rotationsoberfläche annehmen, und es kann sich daher nur darum handeln, den Meridian dieser Fläche zu bestimmen. Ferner wird angenommen, daß die Natur, um eine gewisse Masse Materials abzusprengen, ein Minimum von Kraft aufwende oder daß umgekehrt mit Aufwendung einer bestimmten Kraft ein möglichst günstiges Resultat erzielt werde.



Wählt man die Achse des Minentrichters zur X-Achse und den Punkt, in welchem dieselbe aus dem Material heraustritt, zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und bezeichnet mit R die zur Achse parallele Kraft, welche durch die Explosion entwickelt wird und mit α den Winkel, den die Tangente im Punkte (x, y) des Meridians mit der X-Achse bildet, so ist die Kraftkomponente (senkrecht zum Flächenelement), welche zum Abreißen des Materials längs eines Flächenelementes erforderlich ist, $= dR \sin\alpha = dR \frac{dy}{ds}$. Nimmt man nun an, daß diese Kraft dem Flächenelemente proportional sei und bezeichnet den Proportionalitätsfaktor mit ϱ, so besteht die Gleichung

$$dR \frac{dy}{ds} = \varrho\, 2\pi y\, ds \text{ oder } dR = 2\pi\varrho y \frac{(ds)^2}{dy}, \text{ und man hat}$$

$$R = 2\pi\varrho \int_0^{x_1} y\left(\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{dx}\right) dx = 2\pi\varrho \int_0^{x_1} y\left(\frac{1}{y'} + y'\right) dx$$

zu einem Minimum zu machen. Da die Funktion $F = y\left(\frac{1}{y'} + y'\right)$ die Variable x explizite nicht enthält, so ergibt die Differentialgleichung $\frac{\partial F}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$, durch welche die gesuchte Kurve zu bestimmen ist, das Integral $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C$, also im vorliegenden Falle $y\left(\frac{1}{y'} + y'\right) - y'y\left(1 - \frac{1}{y'^2}\right) = C$ oder $2\frac{y}{y'} = C$. Hieraus folgt

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2} C l y \text{ oder } y = e^{\frac{2(x-x_0)}{C}},$$

und es ist somit der Meridian des Minentrichters eine logarithmische Linie.

Die Grenzbedingung $\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x=0} = y\left(1 - \frac{1}{y'^2}\right) = 0$ liefert $y' = \pm 1$. Es schließt daher der Meridian an derjenigen Stelle, wo er die Y-Achse trifft, d. h. da, wo er das Material verläßt, mit der X-Achse einen Winkel von 45° ein.

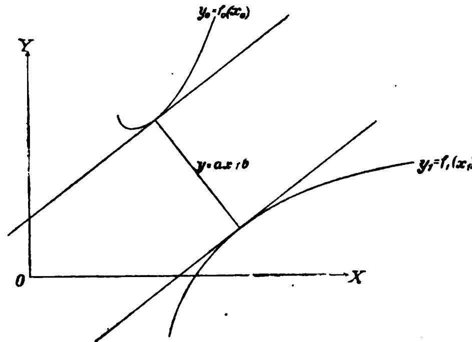
Nun ist $y' = \frac{2}{C} e^{\frac{2(x-x_0)}{C}}$ und daher $1 = \frac{2}{C} e^{-\frac{2x_0}{C}}$ oder $\frac{1}{2}C = e^{-\frac{2x_0}{C}}$.

Setzt man $e^{-\frac{2x_0}{C}} = b$, so ist auch $\frac{1}{2}C = b$, und die Gleichung des Meridians wird $y = b e^{\frac{x}{b}}$.

Hierin bedeutet b den Radius des $x = 0$ entsprechenden (größten) Parallelkreises; wird noch der Radius des Bohrloches mit a und die Tiefe des Minentrichters mit h bezeichnet, so daß für $x = -h$, $y = a$, dann sind die Größen a, b und h durch die Gleichung $\frac{a}{b} = e^{-\frac{h}{b}}$ verbunden, woraus folgt $h = b\, l \frac{b}{a}$.

Aus dieser transzendenten Gleichung kann b gefunden werden, dadurch ist C bestimmt und durch b und C läßt sich x_0 ausdrücken.

9) Aufg. Zwei Kurven $y_0 = f_0(x_0)$; $y_1 = f_1(x_1)$ sind gegeben. Gesucht ist eine Kurve, deren Endpunkte auf den genannten Kurven liegen und deren Länge ein Maximum oder Minimum ist.



Lös.: $J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$

Die Hauptgleichung ist

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0,$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\text{const.}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$y'=a,$$

$$y=ax+b.$$

Die verlangte Kurve ist natürlich eine Gerade.

Bestimmung der Konstanten

$$\left[F\delta x+\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y\right]_{x_0}^{x_1}=0,$$

$$(\sqrt{1+y'^2})_{x_1}\,\delta x_1+\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)_{x_1}(\delta y)_{x_1}=0,$$

$$(\sqrt{1+y'^2})_{x_0}\,\delta x_0+\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)_{x_0}(\delta y)_{x_0}=0.$$

Es ist aber $(\delta y)_{x_1}=\delta y_1-(y')_{x_1}\,\delta x_1$ und $\delta y_1=\frac{df_1}{dx_1}\,\delta x_1$, sodaß sich die erste Gleichung verwandelt in

$$\delta x_1\left(\sqrt{1+a^2}+\left(\frac{df_1}{dx_1}-a\right)\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)=0.$$

Da δx_1 völlig willkürlich ist, muß der Klammerausdruck verschwinden, also erhält man

$$1+a\frac{df_1}{dx_1}=0 \text{ und ganz entsprechend } 1+a\frac{df_0}{dx_0}=0.$$

Die gefundene Gerade muß also eine gemeinsame Normale der gegebenen Kurven sein. Zur Bestimmung der 6 Konstanten a, b, x_0, y_0, x_1, y_1 hat man die 6 Gleichungen

$$y_0=ax_0+b;\quad y_1=ax_1+b;$$
$$y_0=f_0(x_0);\quad y_1=f_1(x_1);$$
$$1+a\frac{df_0}{dx_0}=0;\quad 1+a\frac{df_1}{dx_1}=0.$$

Beispiel: Die gegebenen Kurven seien die Parabel $x_0{}^2=2p(y_0-c)$ und die Gerade $y_1=mx_1$. Dann erhält man die Gleichungen

$$1)\ y_0=ax_0+b;\quad 2)\ y_1=ax_1+b;$$

$$3)\ y_0 = c + \frac{x_0^2}{2p}; \quad 4)\ y_1 = mx_1;$$

$$5)\ 1 + \frac{ax_0}{p} = 0; \quad 6)\ 1 + ma = 0.$$

Aus 6) folgt: a) $a = -\frac{1}{m}$; aus 5): b) $x_0 = pm$; aus 3): c) $y_0 = c + \frac{pm^2}{2}$; aus 1): d) $b = c + p + \frac{m^2 p}{2}$; aus 4) und 2):

$$\text{e) } x_1 = \frac{m}{m^2+1}\left(c + p + \frac{pm^2}{2}\right);$$

$$\text{aus 4): f) } y_1 = \frac{m^2}{m^2+1}\left(c + p + \frac{pm^2}{2}\right).$$

10) Aufg. Welche Kurve muß ein materieller Punkt, auf den nur die Schwerkraft wirkt, durchlaufen, um in der kürzesten Zeit von einer gegebenen Kurve $y_0 = f_0(x_0)$ zu einer zweiten gegebenen Kurve $y_1 = f_1(x_1)$ zu gelangen? Vorausgesetzt wird hierbei, daß die Anfangsgeschwindigkeit im Punkte (x_0, y_0) entstanden sei durch den freien Fall aus einer Höhe h. Die gesuchte Kurve und die gegebenen seien auf dasselbe Koordinatensystem bezogen.

Lös.: Werden die Ordinaten von der horizontal gedachten X-Achse aus nach unten positiv gezählt, so hat der bewegliche Punkt im Punkte (x, y) seiner Bahn die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2g(y + h - y_0)}$. Nun ist $v = \frac{ds}{dt}$ (ds ist Bogen-, dt Zeitelement). Hieraus folgt $dt = \frac{ds}{v}$. Die Zeit T, die der bewegliche Punkt braucht, um von der ersten Kurve zur zweiten zu kommen ist

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}\, dx}{\sqrt{2g(y + h - y_0)}}.$$

Sieht man von dem konstanten Faktor $\sqrt{2g}$ ab, so ist

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y + h - y_0}}.$$

Die Hauptgleichung wird

$$-\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{2\sqrt{y + h - y_0}^3} - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{(1 + y'^2)(y + h - y_0)}}\right) = 0.$$

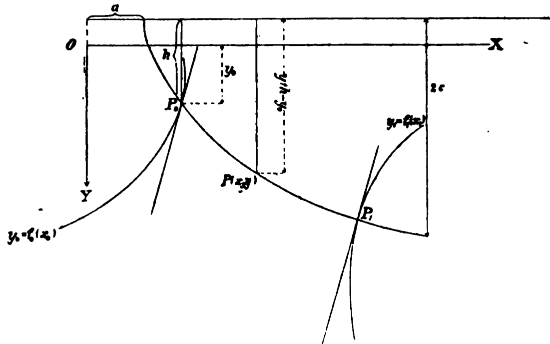
Setzt man $y' = \operatorname{tang}\alpha$, also $\frac{d}{dx} = \operatorname{tang}\alpha \frac{d}{dy}$, so findet man

$$\frac{1}{2\sqrt{y+h-y_0}} + \sin\alpha \frac{d}{dy}\left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{y+h-y_0}}\right) = 0.$$

Man multipliziere mit $\frac{2}{\sqrt{y+h-y_0}}$ und integriere

$$-\frac{1}{y+h-y_0} + \frac{\sin^2\alpha}{y+h-y_0} = \text{const.} = -\frac{1}{c},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c-(y+h-y_0)}{y+h-y_0}}.$$



Man setze $y+h-y_0 = c\sin^2\frac{\varphi}{2}$, dann wird

$$dx = 2c\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = c\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi, \text{ also}$$

$$x - a = c\,(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y + h - y_0 = c\,(1-\cos\varphi).$$

Man erhält also eine Zykloide.

Bestimmung der Konstanten.

Die Randgleichung wird

$$(F)_{x_1}\,\delta x_1 + (\delta y)_{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x_1} - (F)_{x_0} - (\delta y)_{x_0}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x_0} + $$
$$+ \delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y_0}\,dx = 0.$$

Es ist aber

$$(\delta y)_{x_0} = \delta y_0 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0}\delta x_0;\quad (\delta y)_{x_1} = \delta y_1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1}\delta x_1;$$

$$\delta y_0 = \frac{df_0}{dx_0}\,\delta x_0;\ \delta y_1 = \frac{df_1}{dx_1}\,\delta x_1.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Randgleichung ein und beachtet, daß in der vorliegenden Aufgabe

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y+h-y_0}},\quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)(y+h-y_0)}},\quad \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y_0}\,dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{y+h-y_0}^{\,3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2c}}\left(\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2} - \operatorname{cotang}\frac{\varphi_1}{2}\right)$$

ist, so ergibt sich

$$\delta x_1\left[\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y+h-y_0}} + \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{y+h-y_0}}\,(f'_1 - y')\right]_{x_1} -$$

$$-\,\delta x_0\left[\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y+h-y_0}} + \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{y+h-y_0}}\,(f'_0 - y') -\right.$$

$$\left. -\,\frac{f'_0}{\sqrt{2c}}\left(\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2} - \operatorname{cotang}\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]_{x_0} = 0.$$

Da jetzt δx_0 und δx_1 völlig willkürlich sind, müssen die Klammerausdrücke verschwinden. Aus der ersten Klammer findet man

$$[1 + y'^2 + y'(f'_1 - y')]_{x_1} = 0,$$

$$(1 + y'f'_1)_{x_1} = 0.$$

Die gesuchte Kurve steht also auf der gegebenen im zweiten Endpunkt senkrecht.

Vereinfacht man den zweiten Klammerausdruck entsprechend, so ist

$$\left[\frac{1 + f'_0 y'}{\sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{y+h-y_0}} - \frac{f'_0}{\sqrt{2c}}\left(\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2} - \operatorname{cotang}\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]_{x_0} = 0,$$

oder, wenn man die Wurzeln berechnet

$$\left[1 + f'_0 y' - f'_0\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2} + f'_0\operatorname{cotang}\frac{\varphi_1}{2}\right]_{x_0} = 0.$$

Es ist aber stets $\operatorname{cotang}\frac{\varphi}{2} = y'$, also heben sich die beiden mittleren Glieder in der Klammer auf, so daß

$$1 + f'_0\operatorname{cotang}\frac{\varphi_1}{2} = 0.$$

Andrerseits ist aber

$$1 + f'_1 \operatorname{cotang} \frac{\varphi_1}{2} = 0, \text{ daher ist } f'_0 = f'_1,$$

d. h. die Tangenten der gegebenen Kurven in den Schnittpunkten mit der gesuchten Kurve sind parallel.

Zu bestimmen sind die Konstanten $a, c, x_0, y_0, x_1, y_1, \varphi_0, \varphi_1$. Durch die Gleichungen

$$x - a = c(\varphi - \sin \varphi),$$
$$y + h - y_0 = c(1 - \cos \varphi),$$

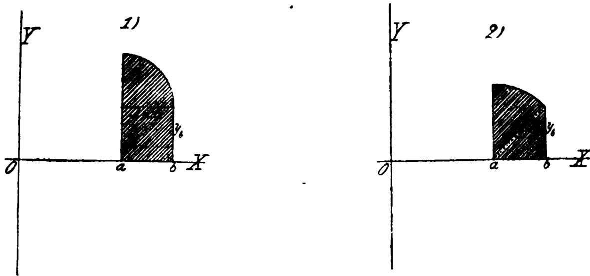
die auch für die Endpunkte gelten, lassen sich x_0, c, x_1, y_1 durch a, y_0, φ_0, φ_1 ausdrücken.

Für diese vier Konstanten erhält man vier Gleichungen, indem man die soeben gefundenen Werte in die Gleichungen

$$y_0 = f_0(x_0); \quad y_1 = f_1(x_1);$$
$$1 + f'_1 \operatorname{cotang} \frac{\varphi_1}{2} = 0;$$
$$f'_0 = f'_1 \text{ einsetzt.}$$

---

11) Aufg. Der eine Endpunkt ($x = b$, $y = y_b$) eines Kurvenbogens von der gegebenen Länge L ist vorgeschrieben; der andere Endpunkt soll sich auf einer Parallelen zur Y-Achse, $x = a$, befinden; es ist die Kurve so zu bestimmen, daß die Fläche, welche durch den genannten Kurvenbogen, die Geraden $x = a$ und $x = b$ und die Abszissenachse begrenzt wird, einen möglichst großen Inhalt besitzt.



Lös.: Es ist das bestimmte Integral $\int_a^b y\,dx$, welches den Flächeninhalt der gesuchten Kurve ausdrückt, zu einem

Maximum zu machen unter der Nebenbedingung, daß $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ sei.

Setzt man $J = \int_a^b (y - \lambda \sqrt{1 + y'^2})\, dx$, $F = y - \lambda \sqrt{1 + y'^2}$, wonach

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = - \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

so hat man zur Bestimmung der verlangten Kurve die Gleichungen

$$1)\ 1 + \frac{d}{dx} \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0, \quad 2)\ \left[\frac{-\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]_{x=a} = 0.$$

Da die Funktion F die Variable x explizite nicht enthält, so ist

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C,$$

also im vorliegenden Falle

$$y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} + \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \text{ oder } y - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

ein erstes Integral der Differentialgleichung 1). Substituiert man noch $y' = \operatorname{tang} \alpha$, so folgt

$$3)\ y = \lambda \cos \alpha + C_1, \quad dx = \frac{dy}{\operatorname{tang} \alpha} = - \lambda \cos \alpha\, d\alpha,$$

$$4)\ x = - \lambda \sin \alpha + C_2.$$

Die Elimination der Größe α aus den Gleichungen 3) und 4) ergibt

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2,$$

und es ist somit die gesuchte Kurve ein Kreis vom Radius λ.

Zufolge der Grenzbedingung 2) soll $y' = 0$ werden für $x = a$, d. h. der Kreis muß die Gerade $x = a$ unter einem rechten Winkel treffen. Aus $0 = \Big[y'\Big]_{x=a} = - \frac{a - C_2}{\sqrt{\lambda^2 - (a - C_2)^2}}$ folgt

$$a)\ C_2 = a.$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 dient die Bemerkung, daß der gefundene Kreis durch den Punkt $x = b$, $y = y_b$ geht; es findet sich

$$b)\ C_1 = y_b \mp \sqrt{\lambda^2 - (b - a)^2}.$$

Wie leicht ersichtlich, muß für den Fall eines Maximums das obere Zeichen beibehalten werden.

Die Konstante λ endlich ergibt sich aus der transzendenten Gleichung

$$L = \lambda \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x-a)^2}} = \lambda \arcsin \frac{b-a}{\lambda} \quad \text{oder}$$

$$\text{c)}\ b - a = \lambda \sin \frac{L}{\lambda},$$

welche zugleich erkennen läßt, daß die gegebene Bogenlänge L gewissen Grenzbedingungen zu unterwerfen ist.

Spezialfälle. 1) Sei $a = 2$, $b = 3$, $y_b = 1$, $L = \frac{1}{2}\pi$; dann wird

$$C_2 = 2, \quad C_1 = 1, \quad \lambda = 1,$$

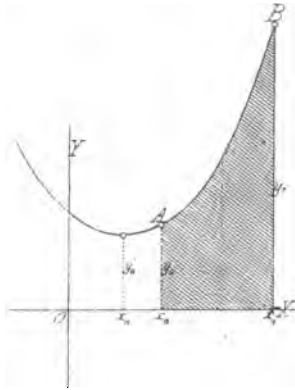
und der Kreisbogen ist ein Viertelkreis.

2) Wenn $a = 2$, $b = 3$, $y_b = 1$, $L = \frac{1}{4}\pi\sqrt{2}$ ist, so wird

$$C_2 = 2, \quad C_1 = 0, \quad \lambda = \sqrt{2},$$

und der Kreisbogen ist ein Achtelkreis.

12) Aufg. Welche Form nimmt ein homogener, unausdehnbarer, aber vollkommen biegsamer Faden von der konstanten Länge L an, welcher zwei gegebene Punkte A (x_0, y_0) und $B(x_1, y_1)$ so verbindet, daß sein Schwerpunkt eine möglichst tiefe Lage besitzt?



Lös.: Der Abstand des Schwerpunktes der gesuchten Kurve von der X-Achse ist bestimmt durch

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

Da der Nenner dieses Quotienten nach der Voraussetzung konstant ist, so hat man nur den Zähler $\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ zu einem Minimum zu machen unter der Nebenbedingung

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = L.$$

Setzt man daher

$$J = \int_{x_0}^{x_1} (y\sqrt{1+y'^2} - \lambda\sqrt{1+y'^2})\,dx = \int_{x_0}^{x_1} (y-\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$F = (y-\lambda)\sqrt{1+y'^2}$$

und vergleicht diese Ausdrücke mit den entsprechenden der Aufgabe 3), so findet man als Gleichung der gesuchten Kurve unmittelbar

$$y - \lambda = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x-x_0'}{m}} + e^{-\frac{x-x_0'}{m}}\right).$$

Die Konstanten m, x_0' und λ genügen den Gleichungen

$$y_0 - \lambda = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x_0-x_0'}{m}} + e^{-\frac{x_0-x_0'}{m}}\right),$$

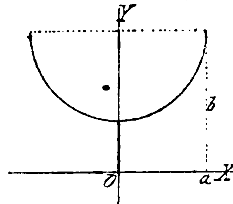
$$y_1 - \lambda = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x_1-x_0'}{m}} + e^{-\frac{x_1-x_0'}{m}}\right),$$

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \left(e^{\frac{x-x_0'}{m}} + e^{-\frac{x-x_0'}{m}}\right)dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}m\left[e^{\frac{x-x_0'}{m}} - e^{-\frac{x-x_0'}{m}}\right]_{x_0}^{x_1}.$$

(Vgl. ebenfalls Aufg. 22).)

13) Aufg. Der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems soll mit dem Punkte $x = a$, $y = b$ durch eine Kurve so verbunden werden, daß der Flächeninhalt der Rotationsoberfläche, welche entsteht, wenn die verlangte Kurve um die Y-Achse rotiert und welche durch einen Parallelkreis vom Radius a begrenzt ist, gleich $na^2\pi$ sei, während zugleich der Rotationskörper ein möglichst großes Volumen besitzt.



Lös.: Das Volumen, welches ein Maximum werden soll, ist bestimmt durch

$$\pi \int_{x=0}^{x=a} x^2\, dy = \pi \int_0^a x^2 y'\, dx;$$

die Bedingungsgleichung lautet:

$$2\pi \int_{x=0}^{x=a} x ds = 2\pi \int_0^a x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = n a^2 \pi.$$

Setzt man daher $J = \pi \int_0^a (x^2 y' - 2\lambda x \sqrt{1 + y'^2})\, dx$, wo λ einen unbestimmten konstanten Faktor bezeichnet, und $F = x^2 y' - 2\lambda x \sqrt{1 + y'^2}$, so hat man zur Bestimmung der verlangten Kurve die Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$, oder da im vorliegenden Falle $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ist, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{dy'}\right) = 0.$

Als ein erstes Integral derselben ergibt sich unmittelbar

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = x\left(x - \frac{2\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = \text{Const.}$$

Nun befindet sich der Koordinatenanfangspunkt auf der Rotationsachse; daher ist der Integrationskonstanten der Wert Null beizulegen, und man erhält

$$1)\quad x\left(x - \frac{2\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0.$$

Diese letztere Gleichung zerfällt in die beiden folgenden

$$2)\quad x - \frac{2\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0, \quad 3)\quad x = 0.$$

Durch Integration der Gleichung 2) findet sich

$$x^2 + (y - y_0)^2 = 4\lambda^2;$$

es ist hiernach die gesuchte Kurve ein Kreis vom Radius 2λ.

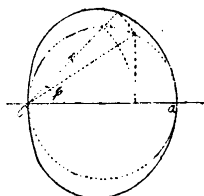
Zur Bestimmung der Konstanten y_0 und λ dient einerseits die Bedingungsgleichung $n a^2 \pi = 2\pi \int_0^a x ds = 4\pi\lambda\,(2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 - a^2}),$

wonach $\lambda = \frac{na}{4\sqrt{n-1}}$, andererseits die Bemerkung, daß die gefundene Kurve durch den Punkt $x = a$, $y = b$ geht, wodurch $y_0 = b + \sqrt{4\lambda^2 - a^2}$ wird. Damit der Kreis außer durch den Punkt $x = a$, $y = b$ auch noch durch den Nullpunkt gehe, muß offenbar der gegebene Flächeninhalt $na^2\pi$ einer gewissen Bedingung unterworfen werden. In allen Fällen, in welchen dieser Bedingung nicht genügt wird, ist derjenige Teil der Y-Achse welcher den Nullpunkt mit dem Kreise verbindet, als zur Lösung der Aufgabe gehörig zu betrachten.

Spezialfälle. 1) $n = 2$ ergibt $\lambda = \frac{1}{2}a$, $y_0 = b$, und die Gleichung des Kreises ist $x^2 + (y - b)^2 = a^2$.
Für $b = a$ geht dieser Kreis durch den Koordinatenanfangspunkt.

2) Für $n = \frac{4}{3}$ folgt $\lambda = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y_0 = b + \frac{a}{\sqrt{3}}$.

14) Aufg. Welche Gestalt müßten die Meridiane der Erde haben, damit die Erde bei unveränderter Masse M und unveränderter Dichtigkeit γ auf einen am Nordpol befindlichen materiellen Punkt in der Richtung der Rotationsachse ein Maximum der Anziehung (nach dem Newtonschen Gesetze) ausübte?



Lös.: Wendet man räumliche Polarkoordinaten r, φ, ϑ an und wählt die Rotationsachse zur Achse und den Pol zum Anfangspunkt des Koordinatensystems, so ist

$$M = \gamma \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{1}{2}\pi} \int_{r=0}^{r=f(\varphi)} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, dr \, d\vartheta.$$

Hierin bedeutet $f(\varphi)$ denjenigen Wert von r, welcher sich aus der gesuchten Gleichung des Meridians ergibt. Die Grenzen für die Integration nach φ sind 0 und $\frac{1}{2}\pi$, da sich, wie man leicht einsieht, nur auf der einen Seite der Tangentialebene im Pole Massenteile befinden können. Führt man die Integrationen nach ϑ und r aus, so folgt

$$M = \frac{2}{3}\pi\gamma \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [f(\varphi)]^3 \sin\varphi \, d\varphi = \text{const.} = k.$$

Für die Komponente der Anziehung in der Richtung der Rotationsachse ergibt sich

$$A = \gamma \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{f(\varphi)} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \, dr \, d\vartheta =$$

$$= 2\gamma\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, f(\varphi) \, d\varphi.$$

Nun soll A zu einem relativen oder

$$2\gamma\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \sin\varphi \cos\varphi \, f(\varphi) - \tfrac{1}{3}\lambda \sin\varphi \, [f(\varphi)]^3 \right\} d\varphi$$

zu einem absoluten Maximum werden. Setzt man, um die Formeln des vorigen § anwenden zu können, $\varphi = x$ und $f(\varphi) = y$, so geht die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ über in

$$\sin x (\cos x - \lambda y^2) = 0.$$

Dieser Gleichung wird genügt entweder durch $\sin x = 0$ oder durch $\cos x - \lambda y^2 = 0$. Die erstere Gleichung liefert die Rotationsachse und hat somit für das Problem keine Bedeutung; die letztere ergibt als Gleichung des gesuchten Meridians, wenn man zur Abkürzung $\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = a$ setzt,

$$r = a\sqrt{\cos\varphi}.$$

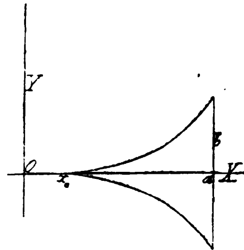
Zur Berechnung der Konstanten a dient die Bedingungsgleichung $M = k$; man findet $a = \sqrt[3]{\frac{15}{4} \frac{k}{\gamma\pi}}$.

Verlangt man, daß die Masse k gleich sei der Masse einer homogenen Kugel vom Radius ϱ und der Dichtigkeit γ, so findet man leicht

$$a = \varrho\sqrt[3]{5}.$$

Die Gleichung $r = a\sqrt{\cos\varphi}$ gestattet eine einfache geometrische Konstruktion der verlangten Kurve.

15) Aufg. Ein Rotationskörper mit gegebener Basis und mit gegebenem Volumen V soll so geformt werden, daß er ein Minimum von Widerstand erfährt, wenn er sich mit konstanter Geschwindigkeit c durch ein widerstehendes Mittel in der Richtung seiner Achse bewegt. Wie lautet die Gleichung des Meridians dieses Rotationskörpers?



Lös.: Es wird angenommen, daß der Widerstand, den ein Element der Oberfläche des Körpers bei der Bewegung durch das widerstehende Mittel zu überwinden hat, der Dichtigkeit γ des Mediums, der gedrückten Fläche, d. h. der Projektion des Flächenelementes auf eine zur Achse senkrechte Ebene und dem Quadrate der in der Normale des betrachteten Elementes gemessenen Geschwindigkeit proportional sei. Sind ferner $x = a$, $y = 0$ die Koordinaten des Mittelpunktes und b der Radius des gegebenen Basiskreises und wird vorausgesetzt, der Meridian schneide die X-Achse im Punkte $x = x_0$, wo x_0 eine zu bestimmende Konstante bedeutet, so ist, wenn man die Achse des Körpers zur X-Achse wählt, der Gesamtwiderstand, der ein Minimum werden soll

$$W = 2\pi c^2 \gamma \int_{x_0}^{a} \frac{y y'^3}{1 + y'^2}\, dx, \text{ während zugleich } V = \pi \int_{x_0}^{a} y^2 dx.$$

Setzt man nun $J = \int_{x_0}^{a} \left(\frac{y y'^3}{1 + y'^2} + 2\lambda y^2 \right) dx$, $F = \frac{y y'^3}{1 + y'^2} + 2\lambda y^2$,

wonach $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y'^3}{1 + y'^2} + 4\lambda y$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = y \cdot \frac{3y'^2 + y'^4}{(1 + y'^2)^2}$, so wird

$$\delta J = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_0}^{a} + \int_{x_0}^{a} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y\, dx.$$

Man hat hiernach zu integrieren die Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$ unter Berücksichtigung der Grenzbedingung $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ für $x = x_0$. Da die Funktion F die Variable x explizite nicht enthält, so ist ein erstes Integral dieser Differentialgleichung $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C$, also in unserem Falle

$$\frac{yy'^3}{1+y'^2} + 2\lambda y^2 = \frac{yy'(3y'^2+y'^4)}{(1+y'^2)^2}.$$

(Die Konstante C ist gleich Null, weil die Kurve die X-Achse schneiden soll.) Hieraus folgt, indem man c für $\frac{1}{\lambda}$ schreibt,

$$y = \frac{cy'^3}{(1+y'^2)^2}.$$

Substituiert man noch $y' = \operatorname{tang} \alpha$, so ergibt sich $y = c \sin^3 \alpha \cos \alpha$,

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tang} \alpha} = c\,(3 \sin \alpha \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha)\, d\alpha,$$

$$x - c_1 = -\tfrac{1}{4}c\,(3 \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha).$$

Durch einfache Umformung erhält man hieraus für die verlangte Kurve

$$y = \tfrac{1}{8}c\,(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi),$$

$x - c_2 = -\tfrac{1}{8}c\,(2 \cos \varphi + \cos 2\varphi)$, wo φ für 2α, c_2 für $c_1 - \tfrac{3}{8}c$ steht. Die gesuchte Kurve ist demnach eine Hypozykloide, für welche der Radius des festen Kreises dreimal so groß als derjenige des erzeugenden Kreises ist. (Vgl. Bd. I, S. 221.)

Bestimmung der Konstanten. Da für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ $y = 0$ wird, so kann man die Bedingung stellen, es soll für $\varphi = 0$, $x = x_0$ sein, wodurch zugleich auch der Grenzbedingung $\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x_0} = 0$ genügt wird. Ist ferner φ_1 der Winkel, für welchen $x = a$, $y = b$, so hat man die Gleichungen

$$x_0 - c_2 = -\tfrac{3}{8}c,$$

$$b = c \sin^3 \tfrac{1}{2}\varphi_1 \cos \tfrac{1}{2}\varphi_1,$$

$$a - c_2 = -\tfrac{1}{8}c\,(2 \cos \varphi_1 + \cos 2\varphi_1),$$ aus denen folgt

$$c = \frac{b}{\sin^3 \frac{1}{2}\varphi_1 \cos \frac{1}{2}\varphi_1}, \quad c_2 = a + \tfrac{1}{8}b\,\frac{2 \cos \varphi_1 + \cos 2\varphi_1}{\sin^3 \frac{1}{2}\varphi_1 \cos \frac{1}{2}\varphi_1},$$

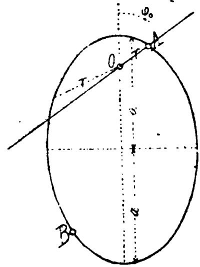
$$x_0 = a + \tfrac{1}{8}b\,\frac{2 \cos \varphi_1 + \cos 2\varphi_1 - 3}{\sin^3 \frac{1}{2}\varphi_1 \cos \frac{1}{2}\varphi_1}.$$

Die Konstante φ_1 endlich bestimmt sich aus der Gleichung

$$V = \pi \int_{x_0}^{a} y^2 dx = \frac{\pi b^3 \left(\frac{3}{8} - \frac{7}{10} \sin^2 \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{3} \sin^4 \frac{1}{2}\varphi_1\right)}{\sin \frac{1}{2}\varphi_1 \cos^3 \frac{1}{2}\varphi_1}.$$

Daß die Konstante V gewissen Bedingungen unterworfen werden muß, ist hieraus leicht ersichtlich.

16) Aufg. Ein materieller Punkt von der Masse 1 wird von einem festen Punkte O nach dem Newtonschen Anziehungsgesetze angezogen. Die Attraktionskraft in der Entfernung 1 sei f. Welche Bahn beschreibt dieser Punkt, wenn er, von einem gegebenen Punkte A ausgehend, sich nach einem zweiten gegebenen Punkte B bewegt? Die Berechnung soll nach dem aus der Mechanik bekannten „Prinzip der kleinsten Wirkung" erfolgen.



Lös.: Das genannte Prinzip nimmt in dem vorliegenden Fall die Form an

$$\int v ds = Min.$$

Hierbei bedeutet v die Geschwindigkeit, ds das Bahnelement.

Wählt man das Anziehungszentrum O zum Pole und die Gerade OA zur Achse eines Polarkoordinatensystems, ist ferner die Strecke $AO = r_1$ und wird die Anfangsgeschwindigkeit kleiner als $\sqrt{\frac{2f}{r_1}}$, etwa gleich $\sqrt{\frac{2f}{r_1} - \frac{f}{a}}$ vorausgesetzt, so kann man, um die Geschwindigkeit v in dem Abstand r zu finden, den Satz von der Erhaltung der Energie anwenden. Dieser lautet in unserm Fall

$$-\frac{f}{r} + \frac{1}{2} v^2 = -\frac{f}{r_1} + \frac{1}{2} v_1^{\,2} = -\frac{f}{2a}.$$

Hieraus findet man

$$v = \sqrt{\frac{2f}{r} - \frac{f}{a}}.$$

Es soll nun $\int \sqrt{\frac{2f}{r} - \frac{f}{a}} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$, wo r' für $\frac{dr}{d\varphi}$ steht

und das Integral zwischen zwei konstanten, den Punkten A und B entsprechenden Grenzen zu nehmen ist, ein Minimum werden.

Setzt man, mit Weglassung des konstanten Faktors $\sqrt{f}$, $F=\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}\sqrt{r^2+r'^2}$, so ist, da die Funktion F die Variable φ explizite nicht enthält,

$$1)\quad \sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}\,\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}}=\text{Const.}=\sqrt{b}$$

ein erstes Integral der Hauptgleichung.

Aus der Gleichung 1) folgt

$$2)\quad \left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\frac{r^4}{b}-r^2=r'^2,$$

und wenn man $\frac{1}{r}=z$, $\frac{dz}{d\varphi}=z'$ substituiert

$$3)\quad \left(2z-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{b}-z^2=z'^2.$$

Die Differentiation dieser letzteren Gleichung ergibt die weitere

$$\frac{1}{b}=z''+z,$$

deren allgemeines Integral

$$4)\quad z=\frac{1}{b}+C\cos(\varphi-\varphi_0)\ \text{ist.}$$

Zufolge der Gleichung 3) hat die Konstante C den Wert $\sqrt{\frac{a-b}{ab^2}}$. Also ist

$$z=\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{a-b}{ab^2}}\cos(\varphi-\varphi_0),\quad r=\frac{b}{1+\sqrt{\frac{a-b}{a}}\cos(\varphi-\varphi_0)}.$$

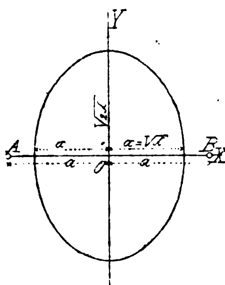
Setzt man noch $\sqrt{\frac{a-b}{a}}=\varepsilon$, wodurch $b=a(1-\varepsilon^2)$ wird, so findet sich

$$r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)},$$

und es ist mithin die verlangte Bahn eine Ellipse, deren große Achse $=2a$ und deren einer Brennpunkt O, der Sitz der anziehenden Kraft, ist. Um die Integrationskonstanten ε und φ_1

zu finden beachte man, daß die bekannten Polarkoordinaten von A und B der Kurvengleichung genügen müssen.

17) Aufg. Ein Rotationskörper, welcher die Rotationsachse in zwei gegebenen Punkten A und B trifft und das gegebene Volumen V hat, soll so bestimmt werden, daß das Trägheitsmoment desselben in bezug auf eine Achse, die senkrecht zur Rotationsachse durch die Mitte von AB gezogen wird, ein Minimum sei.



Lös.: Wird die Rotationsachse AB zur X-Achse und die Achse, auf die das Trägheitsmoment bezogen ist, zur Y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt, so ist

$$V = \pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} y^2\, dx$$

und das fragliche Trägheitsmoment gleich

$$4 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_0^y \int_0^{\sqrt{y^2 - z^2}} (x^2 + z^2)\, dy\, dz\, dx = \pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} (\tfrac{1}{4} y^2 + x^2)\, y^2\, dx,$$

wo α eine konstante Zahl bedeutet, die nur unter einer bestimmten Voraussetzung über die Größe des gegebenen Wertes V mit a übereinstimmt, sonst aber von a verschieden ist.

Multipliziert man $\pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} y^2\, dx$ mit einem unbestimmten konstanten Faktor λ und subtrahiert das Produkt von

$$\pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} (\tfrac{1}{4} y^2 + x^2)\, y^2\, dx,$$

wodurch man nach Weglassung des gemeinschaftlichen konstanten Faktors π erhält

$$J = \int_{-\alpha}^{+\alpha} [(\tfrac{1}{4} y^2 + x^2)\, y^2 - \lambda y^2]\, dx,$$

so ist y als Funktion von x so zu bestimmen, daß δJ verschwindet.

Die Hauptgleichung lautet also $y\,(y^2 + 2x^2 - 2\lambda) = 0$. Hieraus ergibt sich

$$y^2 + 2x^2 - 2\lambda = 0,$$

und es ist somit die verlangte Rotationsfläche ein längliches Sphäroid.

Aus der Gleichung $y^2 + 2x^2 - 2\lambda = 0$ folgt $\alpha = \sqrt{\lambda}$, und es kann daher das Sphäroid nur dann durch die gegebenen Punkte gehen, wenn $\alpha = \sqrt{\lambda} = a$ ist. Für jeden von a verschiedenen Wert von $\sqrt{\lambda}$ ist der die beiden gegebenen Punkte A und B verbindende Teil der Rotationsachse ($y = 0$) als zur Lösung gehörig zu betrachten. Die Größe λ bestimmt sich aus der Gleichung $V = \pi \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} y^2\,dx$, nämlich $\lambda = \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}\right)^2$, es hängt mithin ihr Wert von demjenigen des gegebenen Volumens V ab.

18) Aufg. Auf einem Zylindermantel sind die Punkte A und B fest gegeben. Sie sollen durch eine möglichst kurze Linie auf dem Mantel verbunden werden (Geodätische Linie auf dem Zylinder).

Lös.: Denkt man sich x, y, z als Funktionen einer Veränderlichen t ausgedrückt, so ist

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

zu einem Minimum zu machen unter der Bedingung, daß $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ist. Man hat also das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \lambda\,(x^2 + y^2 - r^2)\right) dt$$

zu variieren, wobei λ jetzt als variabel anzusehen ist, weil die Nebenbedingung in endlicher Form, nicht als bestimmtes Integral, gegeben ist.

Man erhält

$$2\lambda x + \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0;\quad 2\lambda y + \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0;\quad x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Multipliziert man mit $\frac{dt}{ds}$, setzt $\lambda \frac{dt}{ds} = \lambda_1$ und beachtet, daß $\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dx}{ds}$ ist, so ergibt sich

$$1)\ 2\lambda_1 x + \frac{d^2x}{ds^2} = 0;$$

$$2)\ 2\lambda_1 y + \frac{d^2y}{ds^2} = 0;$$

$$3)\ \frac{d^2z}{ds^2} = 0;$$

$$4)\ x^2 + y^2 = r^2.$$

Aus 3) findet man $z = as + b$. Die Gleichung 4) ist zu erfüllen durch die Annahme $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, wobei φ leicht zu deuten ist. Multipliziert man 1) mit $-y$, 2) mit $+x$ und addiert, so findet sich

$$x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = c,$$

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = c,$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{c}{r^2},$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{cs}{r^2}.$$

Es ist somit

$$x = r\cos\left(\varphi_0 + \frac{cs}{r^2}\right),$$

$$y = r\sin\left(\varphi_0 + \frac{cs}{r^2}\right),$$

$$z = as + b.$$

Aus der Identität $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ folgt $a = \sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}}$.

Wählt man nun das Koordinatensystem so, daß Punkt A die Koordinaten $x = r$, $y = 0$, $z = 0$ hat, während die Koordinaten von B $x = r\cos\varphi_1$, $y = r\sin\varphi_1$, $z = z_1$ seien, so ist, da für A die Bogenlänge $= 0$ sein muß

$$\varphi_0 = 0,\ b = 0,\ \text{also}$$

$$x = r\cos\left(\frac{cs}{r^2}\right);\ y = r\sin\left(\frac{cs}{r^2}\right);\ z = s\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}}.$$

Andrerseits war

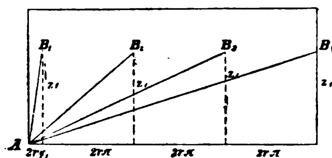
$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi,\ \text{so daß}$$

$$\frac{cs}{r^2} = \varphi,\ s = \frac{r^2\varphi}{c}\ \text{ist, mithin}$$

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$
$$z = \frac{r\varphi}{c}\sqrt{r^2 - c^2}.$$

Die gesuchte Kurve ist also eine Schraubenlinie. (Vgl. Bd. 1, pag. 257.) Um die Konstante c zu bestimmen, beachte man, daß die Kurve auch durch den Punkt B gehen muß. Die zylindrischen Koordinaten desselben sind z_1 und $\varphi_1 + 2n\pi$, wobei n eine ganz willkürliche ganze Zahl ist. Man findet so

$$\frac{r}{c}\sqrt{r^2 - c^2} = \frac{z_1}{\varphi_1 + 2n\pi},\ z = \frac{z_1\varphi}{\varphi_1 + 2n\pi}.$$



Man erhält also zwischen zwei Punkten auf dem Zylindermantel unendlich viele Schraubenlinien als geodätische Linien.

Die $n = 0$ entsprechende Kurve geht direkt von A nach B, die Kurve für $n = 1$ umwindet vorher den Zylinder einmal, die Kurve für $n = n$ umwindet ihn $n$mal, ehe sie B erreicht.

Der Grund für diese Erscheinung ist leicht einzusehen, wenn man die Zylinderfläche auf eine Ebene abwickelt.

19) Aufg. Man bestimme die geodätischen Linien auf der Kugel, deren Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist.

Lös.: Es ist

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)\right] dt\ \text{zu variieren.}$$

λ ist dabei eine unbekannte Variable, t eine Variable, durch

die x, y und z ausgedrückt sind. Setzt man $\lambda \frac{dt}{ds} = \lambda_1$, so erhält man

$$2\lambda_1 x + \frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

$$2\lambda_1 y + \frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

$$2\lambda_1 z + \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Durch Elimination von λ_1 folgt hieraus

$$x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

$$y\frac{d^2z}{ds^2} - z\frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

$$z\frac{d^2x}{ds^2} - x\frac{d^2z}{ds^2} = 0 \text{ oder}$$

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = c_1,$$

$$y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds} = c_2,$$

$$z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds} = c_3.$$

Durch Multiplikation mit z, x, y findet man

$$c_1 z + c_2 x + c_3 y = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, die durch den Anfangspunkt geht. Jede geodätische Linie ist also der Schnitt einer solchen Ebene mit der Kugel, d. h. ein größter Kugelkreis.

20) Aufg. Man bestimme die geodätischen Linien auf einer Rotationsfläche.

Lös.: Ist die Z-Achse die Drehachse, so ist die Gleichung der Fläche: $z = f(r)$, wenn $z = f(x)$ die Gleichung der Meridiankurve in der XZ-Ebene und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist. Setzt man wieder $\lambda \frac{dt}{ds} = \lambda_1$, so ist

$$-\frac{\lambda_1 x}{r} + \frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

$$-\frac{\lambda_1 y}{r} + \frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

$$\lambda_1 + \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

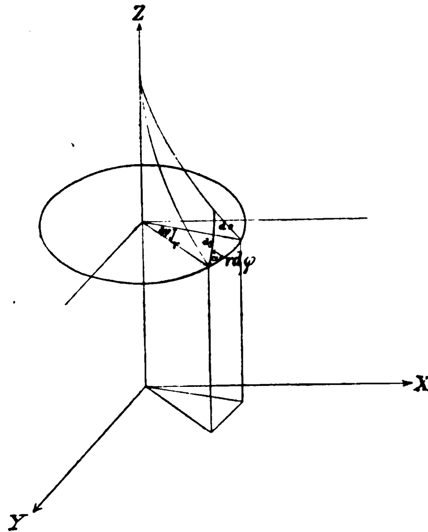
Durch Elimination von λ_1 folgt aus den beiden ersten Gleichungen

$$xy'' - yx'' = 0,$$
$$xy' - yx' = c.$$

Setzt man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so ist

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = c, \text{ also}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 d\varphi = c\,(s_1 - s_0).$$



Projiziert man also verschiedene Stücke der geodätischen Linie auf die XY-Achse und verbindet deren Endpunkte mit dem Durchdringungspunkt der Rotationsachse, so sind die entstandenen Flächen den betreffenden Bogenlängen der geodätischen Linie proportional.

Da nach s differentiiert ist, so ist

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \text{ also}$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \cdot \left(\frac{df}{dr}\right)^2 = 1.$$

Andrerseits ist $r^2 \frac{d\varphi}{ds} = c$, also $ds = \frac{r^2 d\varphi}{c}$, folglich nach leichter Umformung

$$r^4 d\varphi^2 = c^2 dr^2 \left(1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2\right) + r^2 c^2 d\varphi^2.$$

$$d\varphi = \frac{c\,dr \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2}}{r\sqrt{r^2 - c^2}} \quad \text{oder}$$

$$d\varphi = \frac{c\,d\sigma}{r\sqrt{r^2 - c^2}},$$

wenn $d\sigma$ das Bogendifferential eines Meridians der Rotationsfläche ist.

Bezeichnet man den Winkel zwischen Parallelkreis und geodätischer Linie mit α, so ist

$$\operatorname{cotang} \alpha = \frac{r\,d\varphi}{d\sigma} = \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}},$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{c}{r}.$$

Es ist also $c = \pm r \cos \alpha$.

21) Aufg. Man beweise mit Hilfe der Variationsrechnung den Satz, daß die Schmiegungsebene in jedem Punkte einer kürzesten (geodätischen) Linie auf einer gegebenen Oberfläche durch die Flächennormale geht.

Anl. Sei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der gegebenen Fläche, und es werde durch zwei gegebene Punkte A und B dieser Fläche eine beliebige Kurve gelegt. Denkt man sich die Koordinaten x, y, z irgend eines Punktes der Kurve durch eine vierte Variable t ausgedrückt und sind t_1 und t_2 die den gegebenen Punkten entsprechenden Werte derselben, so ist die Länge des Kurvenbogens AB

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

zu einem Minimum zu machen unter der Bedingung $F(x, y\, z) = 0$.

Man geht also aus von dem Integral

$$L_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \lambda F)\, dt,$$

worin x, y, z, λ als unabhängige Variabeln zu betrachten sind.

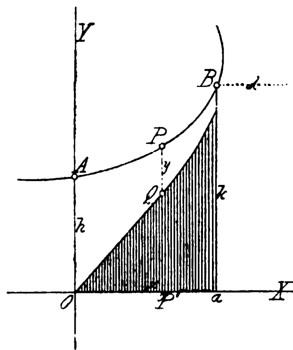
Hieraus folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \lambda \frac{\partial F}{\partial z},$$

wo λ eine konstante Zahl bedeutet. Nun sind die ersten Glieder dieser Gleichungen den Cosinus der Winkel, welche die Hauptnormale im Punkte (x, y, z) der Kurve mit den Koordinatenachsen einschließt, die zweiten Glieder dagegen den Cosinus der Winkel, welche die Flächennormale in demselben Punkte mit den Koordinatenachsen bildet, beziehungsweise proportional. (Vgl. Bd. I, S. 254 und 274.) Hieraus kann leicht geschlossen werden, daß die betreffenden Cosinus selbst einander gleich sein müssen, wodurch der verlangte Beweis geleistet ist.

---

22) Aufg. Es sind gegeben zwei Punkte A und B und außerdem eine gerade Linie. Die gegebenen Punkte sollen durch eine Kurve von folgender Eigenschaft verbunden werden: Fällt man von irgend einem Punkte P der gesuchten Kurve ein Lot PP' auf die gegebene Gerade und trägt auf demselben die Bogenlänge AP von der gegebenen Geraden aus ab $(P'Q)$, so bildet die Gesamtheit der hierdurch bestimmten Punkte Q eine Kurve. Es wird verlangt, daß der Flächeninhalt, welcher durch diese Kurve, die gegebene Gerade und das Lot von B auf letztere begrenzt ist, ein Maximum oder Minimum sei und zugleich die Kurve AB die konstante Länge L habe. (Bernoulli.)



Lös.: Wählt man die gegebene Gerade zur X-Achse und das Lot durch A auf dieselbe zur Y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, sind ferner die Koordinaten der Punkte A

und B beziehungsweise 0, h und a, k und diejenigen des beliebigen Punktes P der gesuchten Kurve x, y, so ist die Bogenlänge $AP = s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$ und man hat $\int_0^a s dx$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen unter der Nebenbedingung

$$L = \int_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Hiernach wird

$$J = \int_0^a (s + \lambda\sqrt{1+y'^2})\,dx,\quad \delta J = \int_0^a \left(\delta s + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\delta y'\right) dx.$$

Nun ist $s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$, $\delta s = \int_0^x \frac{y'\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx$,

$$\int_0^a \delta s\,dx = \Big[x\delta s\Big]_0^a - \int_0^a \left[x\frac{d}{dx}(\delta s)\right] dx = \Big[x\delta s\Big]_0^a - \int_0^a \frac{xy'\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^a \frac{ay'\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx - \int_0^a \frac{xy'\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx = \int_0^a \frac{(a-x)\,y'\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx$$

und daher $\delta J = \int_0^a (a+\lambda-x)\frac{y'\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx =$

$$= \int_0^a \frac{(a+\lambda-x)\,y'\frac{d}{dx}(\delta y)}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx = \left[\frac{a+\lambda-x}{\sqrt{1+y'^2}}\,y'\delta y\right]_0^a -$$

$$- \int_0^a \frac{d}{dx}\left(\frac{a+\lambda-x}{\sqrt{1+y'^2}}\,y'\right)\delta y\,dx.$$

Da in den gegebenen Punkten A und B $\delta y = 0$ ist, so verschwinden die Grenzglieder, und man hat zur Bestimmung der gesuchten Kurve die Differentialgleichung

$$1)\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{a+\lambda-x}{\sqrt{1+y'^2}}\,y'\right) = 0,$$

woraus sofort folgt $\frac{a+\lambda-x}{\sqrt{1+y'^2}}\,y' = c$ oder

$$x - a - \lambda = -\frac{c\sqrt{1+y'^2}}{y'}.$$

Setzt man $y' = \operatorname{tang}\alpha$, so wird

$$2)\quad x - a - \lambda = -\frac{c}{\sin\alpha},$$

$$dy = y' dx = c \frac{d\alpha}{\sin\alpha},$$

$$3) \quad y - y_0 = cl \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Die Elimination der Größe α aus den Gleichungen 2) und 3) liefert.

$$x - a - \lambda = -\tfrac{1}{2}c\left(e^{\frac{y-y_0}{c}} + e^{-\frac{y-y_0}{c}}\right).$$

Die gesuchte Kurve ist mithin eine Kettenlinie, deren Direktrix der Y-Achse parallel ist.

Sie muß durch die Punkte A und B gehen und ihre Länge zwischen den genannten Punkten $= L$ sein. Hiernach ergeben sich zur Bestimmung der Konstanten λ, y_0 und c die Gleichungen

$$a + \lambda = \tfrac{1}{2}c\left(e^{\frac{h-y_0}{c}} + e^{-\frac{h-y_0}{c}}\right),$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2}c\left(e^{\frac{k-y_0}{c}} + e^{-\frac{k-y_0}{c}}\right),$$

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_h^k \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \tfrac{1}{2}c\left[e^{\frac{y-y_0}{c}} - e^{-\frac{y-y_0}{c}}\right]_h^k,$$

von denen die zweite zugleich die Bedeutung der Konstanten λ erkennen läßt; es ist λ gleich dem senkrechten Abstand des Punktes B von der Direktrix.

Bei Festsetzung des Vorzeichens der Konstanten c kommt die Gleichung $dx = \frac{c\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\, d\alpha$ oder $1 = \frac{c\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dx}$ in Betracht, aus welcher erhellt, daß c das gleiche Vorzeichen mit $\frac{d\alpha}{dx}$ haben muß. Demnach ist c positiv oder negativ, je nachdem die verlangte Kurve gegen die X-Achse konvex oder konkav ist.

23) Aufg. Zwei gegebene Punkte sollen durch eine auf rechtwinklige Koordinaten bezogene Kurve verbunden werden, für welche das Produkt aus der Bogenlänge A in den Flächeninhalt B möglichst klein ausfällt.

Lös.: Sind x_0 und x_1 die Abszissen der beiden gegebenen Punkte, so ist

$$A = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \quad B = \int_{x_0}^{x_1} y\, dx,$$

und man hat $J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx \cdot \int_{x_0}^{x_1} y\, dx$ zu einem Minimum zu

machen. Die erste Variation dieses Ausdruckes wird

$$\delta J = B\delta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx + A\delta \int_{x_0}^{x_1} y\, dx =$$

$$= \delta \int_{x_0}^{x_1} (B\sqrt{1+y'^2} + Ay)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(B \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \delta y' + A\delta y\right) dx =$$

$$= \left[B \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[A - \frac{By''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}\right] \delta y\, dx.$$

Da in den gegebenen Punkten $\delta y = 0$ ist, so verschwinden die Grenzglieder, und es bleibt daher, damit $\delta J = 0$ sei, nur noch die Gleichung

$$A - \frac{By''}{(\sqrt{1+y'^2})^3} = 0 \text{ zu erfüllen.}$$

Als allgemeines Integral dieser Differentialgleichung findet man leicht

$$(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = \left(\frac{B}{A}\right)^2.$$

Es ist sonach die gesuchte Kurve ein Kreisbogen, welcher offenbar die X-Achse die konvexe Seite zukehrt. Die Konstanten C_1 und C_2 können mit Hilfe der Bedingung, daß der Kreis durch die beiden gegebenen Punkte gehe, durch A und B ausgedrückt werden, letztere bestimmen sich aus $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = A$ und $\int_{x_0}^{x_1} y\, dx = B$.

24) Aufg. Man lege durch zwei gegebene Punkte, deren Abszissen x_0 und x_1 sind, eine Kurve, für welche das bestimmte Integral $\int_{x}^{x_1} s^n\, dx$ zu einem Maximum oder Minimum wird. Hierbei bedeutet n eine konstante Zahl, und s ist die Bogenlänge der verlangten Kurve.

Lös.: Im vorliegenden Falle ist $J = \int_{x_0}^{x_1} s^n\, dx$,

$$\delta J = n \int_{x_0}^{x_1} s^{n-1}\, \delta s\, dx.$$

Setzt man $\int s^{n-1}\, dx = A$, so wird

$$\int_{x_0}^{x_1} s^{n-1}\,\delta s\,dx = \Big|A\delta s\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} A d(\delta s) = -\int_{x_0}^{x_1} A d(\delta s).$$

Nun ist $\delta s = \delta \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y'\,dx =$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d}{dx}(\delta y) \cdot dx \text{ und daher}$$

$$d(\delta s) = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d}{dx}(\delta y)\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(A\frac{dy}{ds}\right)\frac{d}{dx}(\delta y)\,dx = \left[A\frac{dy}{ds}\,\delta y\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta y \cdot \frac{d}{dx}\left(A\frac{dy}{ds}\right)dx,$$

und $-\int_{x_0}^{x_1} A d(\delta s) = +\int_{x_0}^{x_1} \delta y\,\frac{d}{dx}\left(A\frac{dy}{ds}\right)dx.$

Damit J ein Maximum oder Minimum werde, muß

$$d\left(A\frac{dy}{ds}\right) = 0$$

oder in anderer Form $A d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\,dA = 0$ sein.

Aus der ersteren dieser Gleichungen folgt sofort $A\frac{dy}{ds} = c$ und hieraus $A = \frac{c}{\frac{dy}{ds}}$. Ersetzt man in der zweiten Gleichung das Integral A durch den eben gefundenen Wert, so ergibt sich

$$\frac{c\,d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{dy}{ds}} + \frac{dy}{ds}\,s^{n-1}\,dx = 0 \text{ oder } c\,d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 s^{n-1}\,dx = 0.$$

Substituiert man noch $\frac{dy}{ds} = u$, so wird $dx = ds\sqrt{1-u^2}$, und die vorhergehende Gleichung geht über in die folgende

$$c\,du + u^2 s^{n-1}\,ds\sqrt{1-u^2} = 0,$$

in welcher sich die Variablen s und u trennen lassen:

$$\frac{c\,du}{u^2\sqrt{1-u^2}} + s^{n-1}\,ds = 0.$$

Als ein erstes Integral dieser letzteren Differentialgleichung findet sich $c\int\frac{du}{u^2\sqrt{1-u^2}} + \frac{s^n}{n} + C_1 = -\frac{c\sqrt{1-u^2}}{u} + \frac{s^n}{n} + C_1 = 0,$

woraus man leicht erhält

$$u = \frac{dy}{ds} = \frac{nc}{\sqrt{n^2c^2 + (s^n + nC_1)^2}}.$$

Die verlangte Kurve muß hiernach so beschaffen sein, daß ihre Gleichung der zuletzt gefundenen Differentialgleichung genügt. In dem speziellen Falle $n = 1$ ergibt sich ohne Schwierigkeit die Kettenlinie. (Vgl. Aufg. 22).)

---

25) Aufg. Eine Fläche von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn man in einem Punkte P derselben eine Tangentialebene mit den Achsenabschnitten OA, OB, OC konstruiert, $OA^2 + OB^2 + OC^2$ ein Minimum, d. h. kleiner sei, als für irgend eine andere durch P gehende Fläche.

Lös.: Bezeichnet man die laufenden Koordinaten mit ξ, η, ζ, diejenigen des Punktes P mit x, y, z, so lautet die Gleichung der Tangentialebene im Punkte P der gesuchten Fläche

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \text{ wo } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Hiernach ist

$$OA = \frac{1}{p}(px + qy - z),$$

$$OB = \frac{1}{q}(px + qy - z),$$

$$OC = -(px + qy - z),$$

und es soll

$$F = OA^2 + OB^2 + OC^2 = \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right)(px + qy - z)^2$$

ein Minimum werden.

Setzt man zur Abkürzung $px + qy - z = M$, so wird

$$\delta F = \left[-\frac{2}{p^3}M^2 + 2xM\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right)\right]\delta p +$$
$$+ \left[-\frac{2}{q^3}M^2 + 2yM\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right)\right]\delta q,$$

und es muß gleichzeitig

$$(px + qy - z)\left[-\frac{px + qy - z}{p^3} + x\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right)\right] = 0,$$

$$(px + qy - z)\left[-\frac{px + qy - z}{q^3} + y\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right)\right] = 0 \text{ sein.}$$

Sieht man von der Lösung ab, die daraus hervorgeht, daß man $px + qy - z = 0$ macht, wodurch auch $F = 0$ wird, so bestehen noch die simultanen Differentialgleichungen

$$1)\ x\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right) = \frac{px + qy - z}{p^3},$$

$$2)\ y\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right) = \frac{px + qy - z}{q^3}.$$

Aus denselben folgt unmittelbar $p^3x = q^3y$. Ersetzt man in der Gleichung 1) p^3x durch q^3y, so folgt

3) $q^3y + z = 0$; daher ist auch

4) $p^3x + z = 0$.

Wenn man zum Zwecke der Integration x als konstant betrachtet, so ergibt die Gleichung 3)

$$q = \frac{dz}{dy} = -\frac{z^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} \text{ oder } \frac{dz}{z^{\frac{1}{3}}} = -\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}}.$$

Durch Integration findet sich, indem man an Stelle der Integrationskonstanten eine unbestimmte Funktion von x, $\varphi(x)$, setzt,

$$z^{\frac{2}{3}} = -y^{\frac{2}{3}} + \varphi(x).$$

Auf analoge Weise liefert die Gleichung 4)

$$z^{\frac{2}{3}} = -x^{\frac{2}{3}} + \psi(y).$$

Demnach ist $-y^{\frac{2}{3}} + \varphi(x) = -x^{\frac{2}{3}} + \psi(y)$ oder

$$x^{\frac{2}{3}} + \varphi(x) = y^{\frac{2}{3}} + \psi(y).$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$x^{\frac{2}{3}} + \varphi(x) = y^{\frac{2}{3}} + \psi(y) = \text{Const.} = a^{\frac{2}{3}} \text{ ist.}$$

Hiernach wird $\varphi(x) = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$, $\psi(y) = a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$, und die Gleichung der verlangten Fläche lautet daher

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

26) Aufg. Eine krumme Fläche zu finden, welche bei gegebenem Flächeninhalt das größtmögliche Volumen umschließt.

Lös.: Das Volumen eines durch die Fläche $z = f(x, y)$ begrenzten Körpers ist bestimmt durch das Doppelintegral $V = \iint z\,dx\,dy$, und die Fläche desselben Körpers hat zum Ausdruck $\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy$, wo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Hierbei sind

die aus der Gleichung der betrachteten Fläche sich ergebenden Grenzen für beide Integrale die nämlichen.

Im vorliegenden Falle ist $V=\iint z\,dx\,dy$ zu einem Maximum zu machen unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung

$$A=\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Hat man allgemein $J=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}F(z,\ p,\ q)\,dx\,dy$, so ist

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]\delta z\,dx\,dy+$$
$$+\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial F}{\partial p}\,\delta z\,dy+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial q}\,\delta z\,dx,$$

und es muß, damit J ein Maximum oder Minimum werde, $\delta J=0$, d. h.

$$1)\ \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)=0,\quad 2)\ \int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial F}{\partial p}\,\delta z\,dy=0,$$
$$3)\ \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial q}\,\delta z\,dx=0 \text{ sein.}$$

Für die hier zu lösende Aufgabe ist nun

$$J=\iint(z-\lambda\sqrt{1+p^2+q^2})\,dx\,dy,$$

wo λ einen unbestimmten konstanten Faktor bedeutet,

$$F=z-\lambda\sqrt{1+p^2+q^2},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1,\quad \frac{\partial F}{\partial p}=-\frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$\frac{\partial F}{\partial q}=-\frac{\lambda q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)=-\lambda\,\frac{r+rq^2-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)=-\lambda\,\frac{t+tp^2-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo $r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, und die Gleichung 1) verwandelt sich in $1+\lambda\,\frac{r+rq^2-pqs+t+tp^2-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=0$ oder

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{(1+q^2)\,r-2pqs+(1+p^2)\,t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Hiernach ist, wenn man die Hauptkrümmungsradien in irgend einem Punkte (x, y, z) der betrachteten Fläche mit R_1 und R_2 bezeichnet (vgl. Bd. I, S. 276),

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{\lambda}.$$

Es besitzt demnach die verlangte Fläche in jedem ihrer Punkte dieselbe mittlere Krümmung.

27) Aufg. Es soll durch eine gegebene Raumkurve eine krumme Fläche gelegt werden, deren Flächeninhalt ein Minimum sei. (Minimalfläche.)

Lös.: Durch eine Rechnung, welche der in der vorhergehenden Nummer durchgeführten ganz analog ist, findet man den Satz: In jedem Punkte einer Minimalfläche ist die mittlere Krümmung gleich Null, oder, was dasselbe ist, die Hauptkrümmungsradien sind einander gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen.

Register.

[Die fettgedruckten Zahlen bezeichnen Band und Abteilung, die andern die Seitenzahl.]